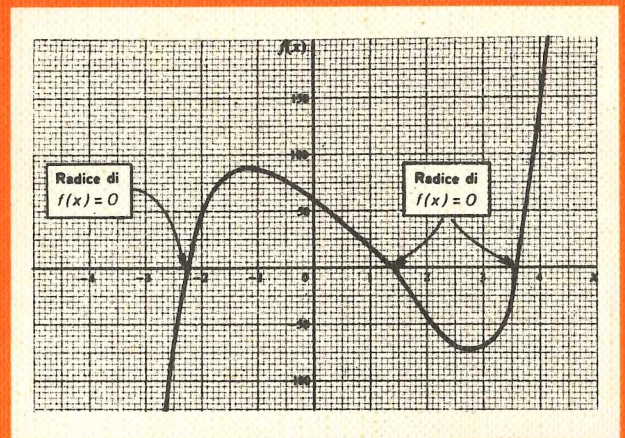


collana **SCHAUM**
teoria e problemi

INTRODUZIONE ai
CALCOLI di
INGEGNERIA

Byron S. GOTTFRIED



360
problemi risolti

ETAS
LIBRI

collana **SCHAUM**
teoria e problemi

INTRODUZIONE ai
**CALCOLI di
INGEGNERIA**
Byron S. GOTTFRIED

ETAS LIBRI

Indice generale

V Prefazione

1 Capitolo 1 — Calcoli aritmetici

Notazione scientifica; Notazione normalizzata a virgola mobile; Cifre significative; Arrotondamento; Troncamento; Addizione e sottrazione; Moltiplicazione e divisione; Elevazione a potenza; Operazioni combinate; Calcoli approssimati; Funzioni algebriche e trigonometriche; Il calcolatore elettronico; Problemi risolti.

25 Capitolo 2 — Unità e dimensioni

Dimensioni fondamentali; Dimensioni derivate; Il sistema metrico internazionale (unità SI); Il sistema degli ingegneri americano; Conversioni di unità; Consistenza dimensionale; Problemi risolti.

44 Capitolo 3 — Grafici e nomogrammi

Coordinate cartesiane; Diagrammi a colonne (istogrammi); Coordinate semilogaritmiche; Coordinate logaritmiche; Altri sistemi di coordinate; Nomogrammi; Problemi risolti.

87 Capitolo 4 — Tecniche di riduzione ed elaborazione dei dati

Dati misurati; Errori; La media aritmetica; Caratteristiche statistiche dei dati; Dati raggruppati; Distribuzioni di frequenza; Distribuzioni cumulative; La distribuzione normale; Metodi di interpolazione mediante curve; Coefficiente di correlazione; Problemi risolti.

122 Capitolo 5 — Soluzioni approssimate di equazioni

Soluzione grafica di equazioni algebriche; Soluzione numerica di equazioni algebriche; Soluzione di equazioni lineari simultanee; Integrazione grafica; Integrazione numerica; Problemi risolti.

157 Capitolo 6 — Calcoli economici

Calcoli degli interessi di pagamenti singoli; Pagamenti annuali uguali; Il valore nel tempo del denaro; Confronto tra strategie di investimento; Problemi risolti.

176 Capitolo 7 — Introduzione ai calcolatori elettronici

Caratteristiche di un elaboratore elettronico; Modi di operare; Operazioni fondamentali di programmazione; Elaborazione di un programma per computer (« flowcharting »); Linguaggi di programmazione; Problemi risolti.

201 Appendice A — Equivalenze di unità

203 Appendice B — Fattore di interesse composto di pagamenti singoli

204 Appendice C — Fattore di interesse composto di pagamenti annuali uguali

205 Appendice D — Fattore di recupero capitale di pagamenti annuali uguali

207 Risposte a problemi supplementari

231 Indice analitico.

Prefazione

Gli studenti di ingegneria di oggi stanno diventando sempre più vincolati a sofisticate apparecchiature elettroniche per effettuare i calcoli di base inerenti la loro disciplina. Se è pur vero che queste apparecchiature hanno eliminato la maggior parte del lavoro lungo e noioso dalla pratica dell'ingegneria, il loro uso tende per contro a impedire che gli studenti acquisiscano un « senso » realistico per i problemi tipici dell'ingegneria. Infatti, alcuni studenti si affidano a tal punto ai loro calcolatori tascabili che non sono in grado di effettuare neppure i calcoli più semplici senza di essi. Inoltre, molti studenti non hanno nessuna idea su quale dovrebbe essere la risposta corretta a un problema e quindi sbagliano nell'accettare risposte che sono evidentemente non corrette!

Questa situazione ha ridato rinnovata importanza alle tecniche di base del calcolo. Il presente libro è inteso come un'introduzione contemporanea ai metodi elementari dell'analisi per l'ingegneria. Buona parte della materia riguarda argomenti tradizionali che hanno costituito i fondamenti dell'analisi per l'ingegneria per molti anni. Questi argomenti comprendono la precisione del calcolo e l'approssimazione numerica (cap. 1), i sistemi di unità di misura e la conversione fra le unità (cap. 2), la rappresentazione grafica dei dati (cap. 3), le tecniche elementari di riduzione dei dati (cap. 4), e le tecniche sia grafiche sia numeriche per la risoluzione di equazioni algebriche e per il calcolo di integrali (cap. 5). I docenti di ingegneria ritengono spesso che questi argomenti siano stati affrontati dai propri studenti in qualche momento del curriculum dei primi anni di studio, eppure è esperienza di chi scrive che questa ipotesi non corrisponde frequentemente alla realtà.

Con l'aggiunta di altri argomenti di più recente sviluppo, gli argomenti tradizionali sopra discussi vengono collocati nell'ambito dell'attuale pratica professionale. Questi ulteriori argomenti includono una discussione sul calcolatore elettronico (cap. 1), le unità standard internazionali (cap. 2), e un'introduzione piuttosto generale ai calcolatori (cap. 7), che illustra l'organizzazione e la formulazione a blocchi dei processi algoritmici senza ricorrere a nessun particolare linguaggio di programmazione. Quest'ultimo argomento fornisce una base eccellente per un successivo corso di programmazione. Sono stati inclusi anche alcuni argomenti introduttivi di economia per ingegneria (cap. 6), con lo scopo di evidenziare l'importanza dei criteri economici. Il sistema metrico internazionale (unità SI) è quello adottato quasi esclusivamente in tutto il libro, se si fa eccezione per il cap. 2, che prende in considerazione sia il sistema metrico internazionale sia il sistema americano degli ingegneri.

Il libro contiene un grande numero di esempi e di problemi risolti, oltre a un ampio gruppo di problemi supplementari al termine di ciascun capitolo. Con ciò esso può venire usato come un complemento a testi più teorici, come un testo vero e proprio, o come una efficace guida per un autodidatta. Particolarmente interessante è il suo impiego come testo complementare in unione con i tipi più tradizionali di testi introduttivi di ingegneria.

Desidero esprimere la mia gratitudine a Mary Catherine Kappauf per il controllo meticoloso di tutti i problemi ed esempi, e a Freda Stephen per la battitura paziente e diligente del manoscritto. Desidero ancora ringraziare i miei studenti e colleghi che hanno esaminato per primi parti del manoscritto e che hanno dato utili suggerimenti. Infine, devo ringraziare lo staff editoriale di questa collana Schaum per l'eccellente collaborazione e il sostegno a me dati.

Calcoli aritmetici

1.1 NOTAZIONE SCIENTIFICA

Secondo la *notazione scientifica* una quantità viene espressa come un numero da 1 a 9.999999...* moltiplicato per un'opportuna potenza di 10. La quantità numerica contenente il punto (ovvero la virgola) dei decimali viene chiamata *mantissa* e la potenza di 10 è chiamata *esponente*. La forma convenzionale del numero si trova spostando il punto dei decimali nella mantissa verso destra (se l'esponente è positivo) o verso sinistra (se l'esponente è negativo).

Esempio 1.1. (a) Il numero 129 può venire espresso secondo la notazione scientifica come 1.29×10^2 . Con ciò il termine 10^2 fa sì che il punto dei decimali sia spostato di due posizioni verso destra. Un altro modo di esprimere ciò è quello di scrivere

$$1.29 \times 10^2 = 1.29 \times 100 = 129$$

(b) Il numero 0.00515 può essere scritto secondo la notazione scientifica come 5.15×10^{-3} . Il termine 10^{-3} fa sì che il punto dei decimali venga spostato di tre posizioni verso sinistra. Quindi,

$$5.15 \times 10^{-3} = 5.15 \times 0.001 = 0.00515$$

La notazione scientifica è particolarmente utile quando si scrivono dei numeri che sono molto grandi o molto piccoli.

Esempio 1.2. La massa di un elettrone è

$$0.000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,910\,86\text{ kg}$$

La superiorità della notazione scientifica,

$$9.1086 \times 10^{-31}\text{ kg}$$

è subito evidente in questo caso.

Esempio 1.3.

Notazione convenzionale	Notazione scientifica
1	1×10^0
-1	-1×10^0
0.001	1×10^{-3}
1000	1×10^3
123 456.789	$1.234\,567\,89 \times 10^5$
-123 456.789	$-1.234\,567\,89 \times 10^5$
0.000 012 345 678 9	$1.234\,567\,89 \times 10^{-5}$
-0.000 012 345 678 9	$-1.234\,567\,89 \times 10^{-5}$
-1.234 567 89	$-1.234\,567\,89 \times 10^0$

1.2 NOTAZIONE NORMALIZZATA A VIRGOLA MOBILE

Anche i sistemi dei calcolatori utilizzano la notazione scientifica, ma in una forma alquanto differente. Un numero viene rappresentato da una mantissa il cui valore varia fra 0.1 e 0.999999..., seguita da un'opportuna potenza di 10. Oltre a ciò, la potenza di 10 viene di solito indicata come $E + n$ od $E - n$, dove $+ n$ o $- n$ rappresenta l'esponente.

* Si noti il punto al posto della virgola decimale adottato in tutto il testo.

Esempio 1.4.

Notazione convenzionale	Notazione normalizzata a virgola mobile
129	0.129E+3
0.005 15	0.515E-2
0.1	0.1E+0
-1	-0.1E+1
0.001	0.1E-2
1000	0.1E+4
123 456.789	0.123 456 789E+6
-123 456.789	-0.123 456 789E+6
0.000 012 345 678 9	0.123 456 789E-4
-0.000 012 345 678 9	-0.123 456 789E-4
-1.234 567 89	-0.123 456 789E+1

In alcuni sistemi di calcolatori il segno non viene indicato quando l'esponente è positivo. Inoltre, alcuni sistemi di calcolatori usano sempre un esponente a due cifre.

Esempio 1.5. In alcuni sistemi di calcolatori il numero 129 comparirà come 0.129E3; in altri come 0.129E 03. Similmente, il numero 0.00515 potrebbe comparire come 0.515E - 2 o come 0.515E - 02.

1.3 CIFRE SIGNIFICATIVE

La *precisione* di una quantità numerica è determinata dal numero di *cifre significative* che essa contiene. Se la quantità viene scritta secondo la notazione normalizzata a virgola mobile, allora il numero di cifre significative è il numero di cifre a destra della virgola decimale.

Esempio 1.6. (a) La quantità 129 consiste di tre cifre significative, poiché il numero normalizzato a virgola mobile 0.129×10^3 (ovvero 0.129E+3) contiene tre cifre a destra della virgola. (b) La quantità 0.00515 consiste di tre cifre significative, poiché 0.515×10^{-2} (ovvero 0.515E - 2) contiene tre cifre a destra della virgola. Si noti che i due zeri che compaiono immediatamente dopo la virgola decimale nella scrittura 0.00515 *non sono* considerate cifre significative.

Gli zeri che compaiono all'interno di un numero normalizzato a virgola mobile (*zeri interni* o *intermedi*) e gli zeri che compaiono alla fine del numero (*zeri terminali*) sono inclusi fra le cifre significative. Tuttavia, lo zero che precede la virgola dei decimali (*zero iniziale*) *non* è considerato cifra significativa.

Esempio 1.7. Il numero 408.7 è costituito da quattro cifre significative, poiché 0.4087×10^3 (ovvero 0.4087E + 3) contiene quattro cifre (zero incluso) a destra della virgola. Similmente, il numero 408.700 è costituito dai sei cifre significative, poiché $0.408 700 \times 10^3$ (ovvero 0.408 700E + 3) contiene sei cifre (inclusi i tre zeri) a destra della virgola.

Quando una quantità intera che termina con gli zeri viene scritta secondo la notazione convenzionale, non è chiaro se gli zeri terminali siano o no cifre significative. Questa ambiguità può venire eliminata scrivendo il numero secondo la notazione normalizzata a virgola mobile.

Esempio 1.8. La quantità 1000 contiene almeno una, e forse addirittura quattro, cifre significative, ma il numero esatto di cifre significative non è specificato. Nella forma normalizzata a virgola mobile, tuttavia, questa quantità numerica può essere scritta come 0.1×10^4 (ovvero 0.1E + 4), che contiene evidentemente soltanto una cifra significativa, oppure come 0.1000×10^4 (ovvero 0.1000E + 4), che contiene quattro cifre significative. Livelli intermedi di precisione possono anche venire specificati scrivendo 0.10×10^4 oppure 0.100×10^4 .

La *cifra più significativa* di un numero è la cifra diversa da zero più a sinistra. La *cifra meno significativa* è la cifra significativa più a destra (che può essere zero).

Esempio 1.9. Nel numero 408.7, la cifra più significativa è 4 e la cifra meno significativa è 7. Similmente, nel numero 408.700, la cifra più significativa è 4 e la cifra meno significativa è 0.

1.4 ARROTONDAMENTO

In molti casi è opportuno ridurre il numero di cifre significative di una quantità numerica eliminando la cifra meno significativa. Ciò si realizza solitamente per *arrotondamento*. Le regole sono le seguenti.

1. Se la cifra meno significativa è inferiore a 5, essa viene semplicemente cancellata. Le cifre rimanenti restano invariate. (Questa operazione è nota come *arrotondamento per difetto*).

Esempio 1.10. La quantità 0.432 diventa 0.43 quando viene arrotondata a due cifre significative.

2. Se la cifra meno significativa è maggiore di 5, la cifra significativa successiva viene aumentata di 1. (Questa operazione è detta *arrotondamento per eccesso*).

Esempio 1.11. La quantità 0.5066 diventa 0.507 quando viene arrotondata a tre cifre significative.

3. Se la cifra meno significativa è esattamente 5, la cifra significativa successiva viene aumentata di 1 se essa è dispari. Se la cifra significativa successiva è pari, tuttavia, essa rimane invariata. (Questa operazione è nota come la *regola dell'aggiunta al dispari*).

Esempio 1.12. La quantità 0.2075 diventa 0.208 quando viene arrotondata a tre cifre significative (poiché 7 è una cifra dispari). Tuttavia, la quantità 0.2045 si scrive 0.204 quando viene arrotondata a tre cifre significative (poiché 4 è pari).

La regola dell'aggiunta al dispari è alquanto arbitraria, ma comporta due vantaggi. Per prima cosa, essa è consistente ed elimina quindi le ambiguità; in secondo luogo, gli errori conseguenti al suo impiego tendono ad annullarsi l'uno con l'altro quando la regola viene impiegata ripetutamente in un calcolo sufficientemente lungo.

L'arrotondamento a cifre multiple si effettua nella stessa maniera. Per esempio, se si devono cancellare due cifre significative, si arrotonda per difetto se le ultime due cifre sono inferiori a 50, si arrotonda per eccesso se esse sono maggiori di 50, e si applica la regola dell'aggiunta al dispari se esse sono uguali a 50.

Esempio 1.13. Qui di seguito vengono mostrati diversi numeri a quattro cifre che vengono arrotondati a due cifre significative.

0.2448	diventa	0.24	(arrotondamento per difetto)
0.2453	diventa	0.25	(arrotondamento per eccesso)
0.2450	diventa	0.24	(regola dell'aggiunta al dispari)
0.2550	diventa	0.26	(regola dell'aggiunta al dispari)
0.2548	diventa	0.25	(arrotondamento per difetto)

Si noti che l'ultimo numero verrebbe non correttamente arrotondato per eccesso a 0.26 se si effettuasse l'arrotondamento a una cifra per volta. In altre parole, 0.2548 verrebbe prima arrotondato per eccesso a 0.255 e quest'ultimo numero diventerebbe poi 0.26 in virtù della regola dell'aggiunta al dispari. Conseguentemente l'arrotondamento a cifre multiple non dovrebbe essere effettuato una cifra alla volta.

1.5 TRONCAMENTO

Se alcune cifre significative vengono cancellate senza mai arrotondare per eccesso, si dice che il numero viene *troncato* (o *tagliato*). Evidentemente, il valore troncato di un numero sarà sempre inferiore o uguale al valore arrotondato del numero stesso.

1.6 ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

Per poter effettuare l'addizione o la sottrazione di numeri espressi secondo la notazione scientifica (oppure secondo la notazione normalizzata a virgola mobile), ciascuno dei numeri deve avere lo stesso esponente (cioè la stessa potenza di 10).

Esempio 1.14. Calcolare la somma di 0.5853×10^{-2} e 0.4011×10^{-3} .

Il secondo numero può essere scritto come 0.04011×10^{-2} . Quindi, il problema diventa

$$\begin{array}{r} 0.5853 \times 10^{-2} \\ + 0.04011 \times 10^{-2} \\ \hline 0.62541 \times 10^{-2} \end{array}$$

Arrotondando a quattro cifre significative, la somma risulta 0.6254×10^{-2} .

La somma o la differenza di due numeri viene normalmente espressa con lo stesso grado di precisione del numero con le minori cifre significative.

Esempio 1.15. Calcolare la differenza fra 0.75×10^{-3} e 0.127×10^{-4} .

Il secondo numero può venire scritto come 0.0127×10^{-3} . Quindi, il problema è

$$\begin{array}{r} 0.75 \times 10^{-3} \\ - 0.0127 \times 10^{-3} \\ \hline 0.7373 \times 10^{-3} \end{array}$$

Poiché il primo numero ha soltanto due cifre significative, anche il risultato finale verrà espresso con due cifre significative. La differenza richiesta è allora 0.74×10^{-3} .

1.7 MOLTIPLICAZIONE E DIVISIONE

Quando si moltiplicano o si dividono numeri scritti secondo la notazione scientifica (o secondo la notazione normalizzata a virgola mobile), è necessario moltiplicare o dividere le mantisse e sommare o sottrarre i corrispondenti esponenti. Più precisamente, se $n_1 = a_1 \times 10^{e_1}$ e $n_2 = a_2 \times 10^{e_2}$, allora

$$n_1 \times n_2 = (a_1 \times a_2) \times 10^{e_1 + e_2} \quad \text{e} \quad \frac{n_1}{n_2} = \frac{a_1}{a_2} \times 10^{e_1 - e_2}$$

Esempio 1.16. Ricavare il prodotto di 0.483×10^{-3} e 0.208×10^2 con tre cifre significative.

Il problema può essere impostato con la

$$(0.483 \times 0.208) \times 10^{-3+2} = 0.100464 \times 10^{-1}$$

per cui il prodotto con tre cifre significative è 0.100×10^{-1} .

Esempio 1.17. Dividere 0.483×10^{-3} per 0.208×10^2 . Esprimere il quoziente con tre cifre significative.

Questo problema è risolto mediante la

$$\frac{0.483}{0.208} \times 10^{-3-2} = 2.3221154 \dots \times 10^{-5} = 0.23221154 \dots \times 10^{-4}$$

per cui il quoziente con tre cifre significative è 0.232×10^{-4} .

Il prodotto o il quoziente di due numeri viene scritto normalmente con lo stesso grado di precisione del numero con le minori cifre significative.

Esempio 1.18. Effettuare il calcolo indicato dalla formula $w = xy/z$, dove $x = 0.645 \times 10^{-2}$, $y = 0.27 \times 10^{-3}$ e $z = 0.1877 \times 10^4$.

Il problema diventa

$$w = \frac{(0.645 \times 10^{-2})(0.27 \times 10^{-3})}{0.1877 \times 10^4} = \frac{(0.645)(0.27)}{0.1877} \times 10^{-2-3-4} = 0.93 \times 10^{-9}$$

Si noti che w è espresso mediante due cifre significative poiché y contiene soltanto due cifre significative.

1.8 ELEVAZIONE A POTENZA

Se un numero scritto secondo la notazione scientifica viene elevato ad una data potenza, allora la mantissa viene elevata a quella potenza e l'esponente viene moltiplicato per la potenza stessa. In altre parole, se il numero originario è espresso nella forma $n = a \times 10^e$, allora

$$n^k = a^k \times 10^{ke}$$

Questa operazione è nota come *elevazione a potenza*. Essa è valida sia per valori interi che frazionari di k (e per combinazioni fra questi valori).

Esempio 1.19. Calcolare il quadrato e la radice quadrata di 0.6538×10^{-6} .

Il quadrato può essere scritto nella forma

$$(0.6538 \times 10^{-6})^2 = (0.6538)^2 \times 10^{(2)(-6)} = 0.4275 \times 10^{-12}$$

Similmente, la radice quadrata si può ottenere scrivendo

$$(0.6538 \times 10^{-6})^{0.5} = (0.6538)^{0.5} \times 10^{(0.5)(-6)} = 0.8086 \times 10^{-3}$$

Quando si eleva un numero ad una potenza frazionaria, può essere opportuno aumentare o diminuire l'esponente originario (spostando la posizione della virgola nella mantissa) così da ottenere un esponente finale intero.

Esempio 1.20. Calcolare la radice cubica di 0.8375×10^{-5} .

Se l'esponente dato, -5 , viene moltiplicato per $1/3$, l'esponente risultante non sarà un numero intero. Tuttavia, se scriviamo il numero dato come 8.375×10^{-6} , si ottiene

$$(8.375 \times 10^{-6})^{1/3} = (8.375)^{1/3} \times 10^{(1/3)(-6)} = 2.031 \times 10^{-2} = 0.2031 \times 10^{-1}$$

1.9 OPERAZIONI COMBINATE

In calcoli più complicati, i risultati intermedi dovrebbero venire espressi nella forma più precisa possibile (entro limiti ragionevoli). La risposta finale viene poi arrotondata in modo che non contenga più cifre significative di uno qualsiasi dei numeri corrispondenti ai dati di partenza.

Esempio 1.21. Utilizzando un calcolatore con 8 cifre, effettuare il calcolo indicato dalla formula

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

per i dati seguenti:

$$a = 0.1406 \times 10^{-3} \quad b = 0.4774 \times 10^0 \quad c = 0.4052 \times 10^3$$

Sostituendo i dati nella formula, si ottiene

$$\begin{aligned} x &= \frac{-0.4774 + \sqrt{(0.4774)^2 - (4)(0.1406 \times 10^{-3})(0.4052 \times 10^3)}}{(2)(0.1406 \times 10^{-3})} \\ &= \frac{-0.4774 + \sqrt{0.22791076 - 0.22788448}}{0.2812 \times 10^{-3}} = \frac{-0.4774 + \sqrt{0.00002628}}{0.2812 \times 10^{-3}} \\ &= \frac{-0.4774 + 0.0051264022}{0.2812 \times 10^{-3}} = \frac{-0.4722735978}{0.2812 \times 10^{-3}} = -1.6794936 \times 10^3 \end{aligned}$$

Arrotondando a quattro cifre significative, si ottiene il risultato desiderato:

$$x = -1.679 \times 10^3 = -0.1679 \times 10^4$$

Si noti che otto cifre significative sono state mantenute dove possibile fino al termine ultimo del calcolo. Se avessimo arrotondato a quattro cifre significative nel corso dei calcoli intermedi, si sarebbe ottenuto

$$x = \frac{-0.4774 + \sqrt{0.2279 - 0.2279}}{0.2812 \times 10^{-3}} = \frac{-0.4774}{0.2812 \times 10^{-3}} = -1.697\,724\,0 \times 10^3$$

In questo modo la risposta finale sarebbe stata $x = -0.1698 \times 10^4$, risultato corretto soltanto per due cifre significative.

1.10 CALCOLI APPROSSIMATI

Molti calcoli tecnici non devono essere effettuati con un alto grado di precisione. Talvolta si richiede soltanto una risposta grossolana sia per avere un'idea complessiva di un certo problema sia per verificare un risultato ottenuto con mezzi più sofisticati.

Per trovare una soluzione approssimata di un problema che implica addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni, si scriva ciascun numero secondo la notazione scientifica, conservando soltanto due cifre significative. Le operazioni aritmetiche possono allora essere effettuate mentalmente con un ragionevole grado di precisione. Gli errori che si commettono con questo procedimento tendono ad annullarsi gli uni con gli altri.

Esempio 1.22. Si consideri la formula

$$w = \frac{a}{bc} - \frac{xy}{z}$$

Si ricavi un valore approssimato di w , essendo dati

$$\begin{aligned} a &= 27.86 & x &= 0.006\,674 \\ b &= 0.043\,51 & y &= 16.498 \\ c &= 88.266 & z &= 0.054\,707 \end{aligned}$$

Il problema si può risolvere scrivendo (il simbolo $\approx$ significa « approssimativamente uguale »)

$$\begin{aligned} w &\approx \frac{2.8 \times 10^1}{(4.4 \times 10^{-2})(8.8 \times 10^1)} - \frac{(0.67 \times 10^{-2})(1.6 \times 10^1)}{0.55 \times 10^{-1}} \\ &\approx \frac{28}{4} - \frac{0.11}{0.055} \approx 7 - 2 = 5 \end{aligned}$$

Così facendo, e cioè con calcoli aritmetici fatti a mente, si ottiene $w \approx 5$. (La risposta esatta, con quattro cifre significative, è 5.242).

Le operazioni di elevazione a potenza sono più difficili da approssimare mentalmente. Problemi che implicano un esponente frazionario (decimale) possono risultare particolarmente difficili da risolversi per questa via, poiché l'ordine di grandezza del risultato finale può non essere subito evidente. Tuttavia, se l'esponente è una frazione positiva, allora il risultato della elevazione a potenza dovrà essere compreso fra 1 ed il numero di partenza. (Si ricordi che qualsiasi numero diverso da zero elevato alla potenza zero vale 1, cioè $n^0 = 1$). Si noti che le radici quadrate, le radici cubiche, ecc., cadono in questa categoria.

Un'operazione che implica un esponente frazionario negativo può sempre venire scritta come l'inverso di un'operazione che implica un esponente frazionario positivo.

Esempio 1.23. Stimare il valore di $(45)^{-0.3}$. (A prima vista, si potrebbe non avere nessuna idea dell'ordine di grandezza del risultato richiesto!)

Reimpostiamo il problema, cercando il valore di $1/(45)^{0.3}$. Sappiamo che il valore del denominatore sarà compreso fra 1 e 45. Inoltre sappiamo che $(27)^{1/3} = 3$ e $(64)^{1/3} = 4$. Possiamo quindi scrivere

$$(45)^{0.3} \approx 3.5 \quad \text{e} \quad (45)^{-0.3} \approx \frac{1}{3.5} \approx 0.3$$

(La risposta corretta è 0.3192).

Se i numeri usati in un calcolo non sono noti con precisione, allora una soluzione precisa, dettagliata sarà priva di significato. Le soluzioni approssimate sono particolarmente adatte in queste situazioni.

Esempio 1.24. Un grosso calcolatore è in grado di eseguire un'operazione aritmetica fondamentale in circa 2 nanosecondi (2×10^{-9} s). Il tempo macchina costa 600 dollari all'ora. Quanto costerebbe preparare il libro-paga di 1000 dipendenti, assumendo che le registrazioni sul libro-paga per ciascun dipendente richiedano circa 50 operazioni aritmetiche?

Il numero totale di operazioni aritmetiche necessarie per preparare l'intero libro-paga sarà

$$50 \times 1000 = 50\,000 = 5 \times 10^4$$

cosicché il tempo macchina richiesto sarà

$$(5 \times 10^4)(2 \times 10^{-9}) = 10 \times 10^{-5} = 10^{-4} \text{ s}$$

Poiché il tempo macchina costa 600 dollari/ora, il costo totale (in dollari) per preparare il libro-paga sarà

$$\left(\frac{600}{3600}\right)(10^{-4}) = \frac{1}{6} \times 10^{-4} \approx 0.17 \times 10^{-4}$$

In altre parole, l'intero libro-paga può essere preparato con una spesa di soli 0.002 cents!

Da questo semplice calcolo, siamo giunti ad una conclusione molto significativa, e cioè che il costo d'impiego di un grosso calcolatore per una tipica applicazione commerciale è estremamente basso, nonostante l'alto costo orario della macchina. Inoltre questa conclusione sarà corretta anche se i dati stimati (il numero assunto di calcoli aritmetici richiesti per ciascun dipendente) fossero sensibilmente sbagliati.

1.11 FUNZIONI ALGEBRICHE E TRIGONOMETRICHE

Le funzioni esponenziali, logaritmiche e trigonometriche compaiono frequentemente nei calcoli tecnici. Queste funzioni si possono valutare nel modo migliore con un calcolatore elettronico o attraverso una serie di tabelle.

La valutazione di una funzione si può considerare come un'operazione che trasforma un dato numero in un nuovo numero. Il numero dato è chiamato *argomento* della funzione.

Esempio 1.25. Supponiamo di voler valutare le formule

$$y = e^x \quad y = \log x \quad y = \sin x$$

per un dato valore di x . Ciascuna formula implica la valutazione di una singola funzione (e cioè la funzione esponenziale, la funzione logaritmo e la funzione seno). In ciascun caso l'argomento, x , viene trasformato in una nuova quantità, y .

La funzione esponenziale

Nell'analisi matematica si dimostra che la quantità $(1+m^{-1})^m$ tende al valore costante 2.718 281 8... per m molto grande. Questa quantità, che è rappresentata dalla lettera e , è la base del sistema dei logaritmi *naturali* (o *neperiani*).

Molti problemi tecnici richiedono l'elevazione a potenza della quantità e . Quindi la funzione e^x è nota come la *funzione esponenziale*. Talvolta si fa una distinzione fra la *funzione esponenziale positiva*, per la quale $x \geq 0$, e la *funzione esponenziale negativa*, dove $x \leq 0$. Quest'ultima si scrive spesso nella forma $y = e^{-x}$, $x \geq 0$.

La fig. 1-1 mostra un diagramma delle funzioni esponenziali positiva e negativa. Si noti che la funzione esponenziale positiva tende all'infinito al crescere della x , mentre la funzione esponenziale negativa tende a zero. Si noti ancora che entrambe le funzioni esponenziali tendono a 1 per x che tende a zero (poiché $e^0 = 1$). Le caratteristiche importanti della funzione esponenziale sono riassunte nella tab. 1-1 a pag. 13.

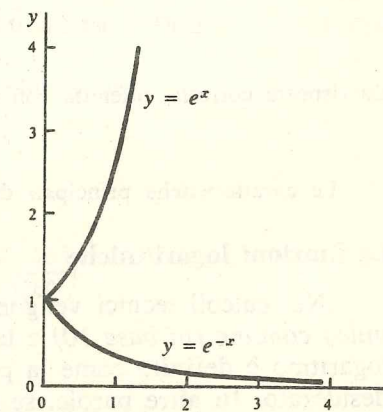


Fig. 1-1

Esempio 1.26. La corrente in un circuito elettrico può essere rappresentata dall'equazione

$$y = ae^{-bt}$$

dove y rappresenta la corrente (in mA), t rappresenta il tempo (in secondi) ed a e b sono delle costanti positive (le cui unità sono rispettivamente mA e s⁻¹). Se $a = 2$ e $b = 0.5$, determinare la corrente dopo 3 s. Quale frazione è questa corrente di quella iniziale (cioè della corrente a $t = 0$)?

La corrente dopo 3 s si può ottenere scrivendo

$$y = 2e^{-(0.5)(3)} = 2e^{-1.5}$$

La funzione esponenziale si può valutare facilmente con un calcolatore elettronico. Si ricava così $e^{-1.5} = 0.223\,130\,16$, e quindi

$$y = 2(0.223\,130\,16) = 0.446\,260\,32 \approx 0.45 \text{ mA}$$

La corrente iniziale si può ottenere facilmente dalla

$$y = 2e^{-(0.5)(0)} = 2e^0 = 2 \text{ mA}$$

Quindi la frazione della corrente iniziale rimanente dopo 3 s è $0.45/2 = 0.225$.

Si noti che la corrente diminuisce sempre più al crescere di t , fino praticamente ad annullarsi per t molto grande. Questo tipo di comportamento è detto *decadimento esponenziale*.

Se x è piccolo (in valore assoluto), la funzione esponenziale può venire approssimata mediante la

$$e^x \approx 1+x$$

Questa approssimazione è valida almeno fino alla quarta cifra decimale per $|x| \leq 0.01$, ed almeno fino alla seconda cifra decimale per $|x| \leq 0.1$. L'approssimazione è utile per controllare i risultati o per valutare la funzione esponenziale se non si dispone di un calcolatore o di una serie di tabelle.

Esempio 1.27. Una sostanza radioattiva, A, decade esponenzialmente per formare una nuova sostanza, B, che a sua volta decade (più lentamente) per formare una sostanza stabile, C. La sequenza degli eventi può essere rappresentata schematicamente nel modo seguente:

$$A \rightarrow B \rightarrow C$$

Se si parte con A pura, la concentrazione di B ad un istante t qualsiasi può venire determinata mediante l'equazione

$$y = \frac{c_1}{c_1 - c_2} (e^{-c_2 t} - e^{-c_1 t})$$

dove y rappresenta la concentrazione di B (espressa come un numero puro), t rappresenta il tempo (in ore), e c_1 e c_2 (entrambe in h⁻¹) sono dette *costanti di decadimento*. Determinare la concentrazione di B dopo 1 h per il caso in cui $c_1 = 0.07$ e $c_2 = 0.02$.

Sostituendo questi valori nell'equazione precedente, si ottiene

$$y = \frac{0.07}{0.07 - 0.02} [e^{-(0.02)(1)} - e^{-(0.07)(1)}] = 1.4 [e^{-0.02} - e^{-0.07}] \\ \approx 1.4 [(1 - 0.02) - (1 - 0.07)] = (1.4)(0.05) = 0.07$$

La risposta corretta, ottenuta con un calcolatore elettronico, è

$$y = 1.4(0.980\,198\,67 - 0.932\,393\,82) \approx 0.0669$$

Le caratteristiche principali della funzione esponenziale sono riassunte nella tab. 1-1 a pag. 13.

Le funzioni logaritmiche

Nei calcoli tecnici vengono usati due tipi di funzioni logaritmiche, la *funzione logaritmica comune (in base 10)* e la *funzione logaritmica naturale (in base e)*. In ciascun caso il logaritmo è definito come la potenza a cui la base deve essere elevata per ottenere il numero desiderato. In altre parole, se $x = 10^y$, allora y è il logaritmo (comune) di x , e si scrive solitamente $y = \log_{10} x$, ovvero semplicemente $y = \log x$. Similmente, se $x = e^y$, allora y è il

logaritmo naturale di x , e si scrive $y = \log_e x$, oppure, più comunemente $y = \ln x$.

La fig. 1-2 contiene diagrammi di $\log x$ e di $\ln x$. Si noti che le funzioni logaritmiche crescono molto al crescere di x e tendono a $-\infty$ al tendere di x a zero. Si noti ancora che le funzioni logaritmiche sono negative per $0 < x < 1$, e che $\log 1 = \ln 1 = 0$. Infine si deve ricordare che le funzioni logaritmiche non sono definite per valori negativi di x .

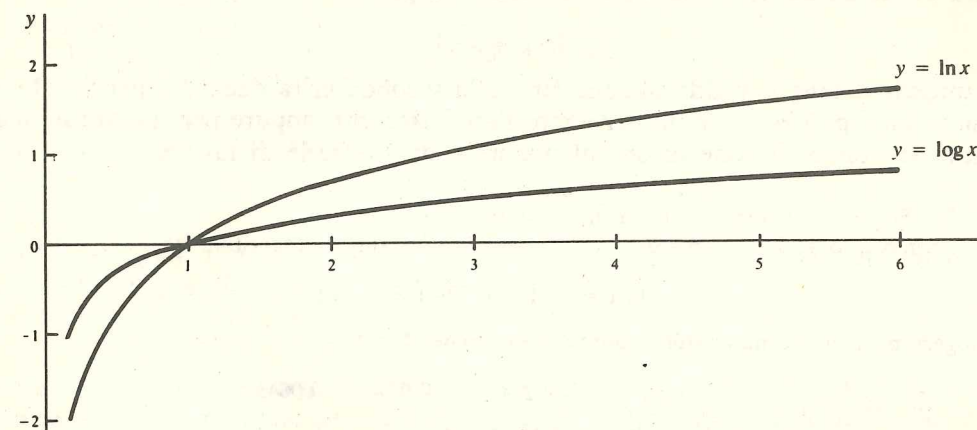


Fig. 1-2

Esempio 1.28. Un recipiente cilindrico contenente acqua viene svuotato facendo uscire l'acqua da una piccola apertura sul fondo. L'altezza dell'acqua nel recipiente e la velocità di scarico sono collegate dall'equazione

$$h = 0.65 \log_{10} (1 + 8v)$$

dove h è l'altezza dell'acqua nel recipiente (in metri) e v è la velocità di scarico (m/s). Quale altezza dell'acqua corrisponde ad una velocità di scarico di 0.1 m/s?

Sostituendo il valore $v = 0.1$ nell'equazione precedente, si ottiene

$$h = 0.65 \log (1 + 8 \times 0.1) = 0.65 \log 1.8$$

La funzione logaritmica si può valutare con un calcolatore elettronico o mediante una tavola dei logaritmi, col che si ha

$$\log 1.8 = 0.255\,272\,51$$

e quindi $h = (0.65)(0.255\,272\,51) \approx 0.166 \text{ m}$.

Esempio 1.29. Una barra metallica a 1300 °C viene immersa in un bagno d'olio la cui temperatura è mantenuta a 100 °C. La temperatura Celsius al centro della barra è data dall'espressione

$$T = 100 + 1200e^{-0.1t}$$

dove t è il tempo (in s) in cui la barra rimane nel bagno a temperatura costante. Determinare il tempo richiesto perché il centro della barra si raffreddi a 500 °C.

Per risolvere questo problema, l'equazione deve venire riscritta nella forma

$$\frac{T-100}{1200} = e^{-0.1t}$$

Prendendo i logaritmi naturali di ciascun membro,

$$\ln \left(\frac{T-100}{1200} \right) = -0.1t \quad \text{ovvero} \quad t = -10 \ln \left(\frac{T-100}{1200} \right)$$

Se allora si pone $T = 500$, si ottiene

$$t = -10 \ln \left(\frac{500-100}{1200} \right) = -10 \ln \frac{1}{3} = -10(-1.098\,612\,3) \approx 11 \text{ s}$$

Le funzioni $\log x$ e $\ln x$ sono fra loro collegate dalle

$$\ln x = 2.302\,585\,1 \log x \quad \text{e} \quad \log x = 0.434\,294\,48 \ln x$$

Quindi, se è nota una delle funzioni logaritmiche, l'altra può venire determinata facilmente. (Si noti che $\ln x$ sarà sempre maggiore di $\log x$).

Se x è prossimo ad 1, il suo logaritmo naturale può venire approssimato dalla

$$\ln x \approx x - 1$$

Questa approssimazione è valida almeno fino alla seconda cifra decimale per $|x-1| \leq 0.01$. L'approssimazione può essere utile per controllare i risultati, oppure per stimare il valore dei logaritmi se non si dispone di un calcolatore o di una serie di tavole.

Esempio 1.30. Stimare il valore del logaritmo comune di 0.99.

Poiché l'argomento (0.99) è prossimo ad 1, possiamo stimare il logaritmo *naturale* come

$$\ln x \approx x - 1 = 0.99 - 1 = -0.01$$

Quindi il logaritmo comune può essere approssimato come

$$\log x \approx (0.434\,294\,48)(-0.01) \approx -0.0043$$

La risposta corretta, ad otto decimali, è $-0.004\,364\,81$.

Le caratteristiche principali delle funzioni logaritmiche sono riassunte nella tab. 1-1 a pag. 13.

Le funzioni trigonometriche

Delle sei funzioni trigonometriche ne considereremo soltanto due, il seno ed il coseno, in quanto queste sono le funzioni trigonometriche più comunemente usate; del resto, le quattro funzioni rimanenti si possono facilmente ottenere da queste due.

Supponiamo di considerare un triangolo rettangolo, come quello mostrato in fig. 1-3. Per tale triangolo, il *seno* dell'angolo θ è definito come il rapporto fra il lato opposto all'angolo e l'ipotenusa. Quindi, in relazione alla fig. 1-3, sarà $\sin \theta = a/c$. Similmente, il *coseno* dell'angolo è definito come il rapporto fra il lato adiacente e l'ipotenusa. Sarà quindi $\cos \theta = b/c$ in fig. 1-3. In base al teorema di Pitagora, si può dimostrare facilmente che il seno ed il coseno sono fra loro legati dall'equazione

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

Esempio 1.31. Una forza (F) di 8 newton agisce secondo un angolo (θ) di 42° rispetto all'orizzontale. Determinare la componente orizzontale e la componente verticale di questa forza.

Le componenti orizzontale e verticale sono date da

$$F_o = F \cos \theta = 8 \cos 42^\circ \quad F_v = F \sin \theta = 8 \sin 42^\circ$$

Il seno ed il coseno possono venire valutati con l'impiego di un calcolatore elettronico (oppure con tavole). Con ciò

$$\sin 42^\circ = 0.669\,130\,61 \quad \cos 42^\circ = 0.743\,144\,83$$

e quindi

$$F_o = 8 (0.743\,144\,83) \approx 5.95 \text{ N} \quad F_v = 8 (0.669\,130\,61) \approx 5.35 \text{ N}$$

L'argomento di una funzione trigonometrica può essere espresso o in *gradi* o in *radianti*, anche se l'impiego dei radianti è più comune nei calcoli tecnici. Si ricorda che

$$360 \text{ gradi} = 2\pi \text{ radianti, ovvero } 1 \text{ radiante} = 57.3 \text{ gradi}$$

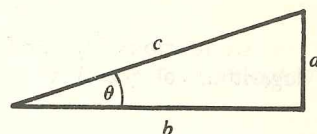


Fig. 1-3

Esempio 1.32. Una lunga e sottile colonna verticale è vincolata rigidamente alla sua base. Se una forza verticale viene applicata all'estremità libera, la colonna subirà una flessione in senso orizzontale rispetto alla sua posizione verticale originaria. La flessione in un certo punto y può essere determinata dalla espressione

$$d = 2 \sin \left(\frac{3\pi y}{2L} \right)$$

dove d = flessione orizzontale, mm
 y = distanza verticale dalla base della colonna, mm
 L = lunghezza della colonna, mm

Determinare la flessione in un punto posto ad $1/4$ dell'altezza della colonna.

In questo caso, $y/L = 1/4$. Quindi

$$d = 2 \sin \left(\frac{3\pi}{2} \times \frac{1}{4} \right) = 2 \sin \frac{3\pi}{8} = 2 \sin 1.1781$$

(Si noti che l'argomento, 1.1781, è espresso in radianti). La funzione seno si può ora valutare con l'impiego di un calcolatore o di una serie di tabelle, ottenendo

$$d = 2(0.923\,879\,53) \approx 1.848 \text{ mm}$$

La fig. 1-4 mostra i diagrammi di $\sin x$ e di $\cos x$ in funzione di x (in radianti). Si vede che ciascuna funzione si ripete per x maggiore di 2π o per x minore di 0. Perciò le funzioni seno e coseno si dicono *periodiche*, con periodo 2π . Si vede inoltre che la funzione coseno è simmetrica rispetto all'asse y , cioè

$$\cos(-x) = \cos x$$

mentre la funzione seno è antisimmetrica, cioè

$$\sin(-x) = -\sin x$$

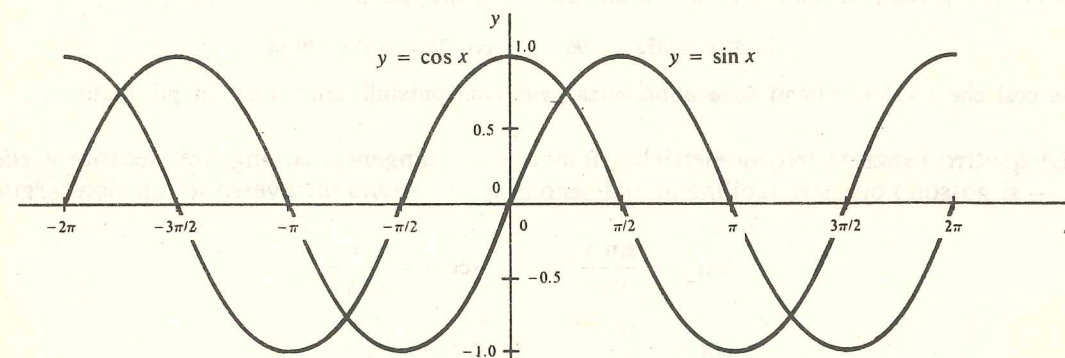


Fig. 1-4

Esempio 1.33. Utilizzare la fig. 1-4 per stimare il valore di $y = \sin 50$ (con l'argomento espresso in radianti).

Poiché la funzione seno è periodica con periodo 2π , si può scrivere

$$\sin 50 = \sin(50 - 2\pi) = \sin(50 - 4\pi) = \dots$$

Il più grande multiplo di 2π che non supera 50 è

$$7 \times 2\pi = 7 \times 6.283\,185\,3 = 43.982\,297$$

Quindi

$$\sin 50 = \sin(50 - 14\pi) = \sin 6.017\,702\,9 \approx \sin(1.9\pi) \approx -0.2$$

La risposta corretta, con 4 decimali, è $\sin 50 = -0.2624$.

Poiché le funzioni seno e coseno vengono usate tanto frequentemente nei calcoli tecnici, si dovrebbe ricordare a memoria la forma generale delle due curve mostrate in fig. 1-4. In particolare, si dovrebbero ricordare i valori chiave inclusi nella tab. 1-1 di pag. 13.

Esempio 1.34. Determinare il valore di $\cos(-21\pi)$

Poiché la funzione coseno è simmetrica e periodica con periodo 2π , si può scrivere

$$\cos(-21\pi) = \cos 21\pi = \cos 19\pi = \dots = \cos \pi = -1$$

Se x è piccolo (in valore assoluto), le funzioni seno e coseno si possono approssimare mediante le

$$\sin x \approx x \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

dove x è espresso in radianti. Queste due approssimazioni sono valide almeno fino alla sesta cifra decimale per $|x| \leq 0.01$, ed almeno fino alla terza cifra decimale per $|x| \leq 0.1$. Esse sono utili per il controllo dei risultati e per stimare il valore delle funzioni seno e coseno in mancanza di un calcolatore o di una serie di tabelle trigonometriche.

Esempio 1.35. Stimare il valore di $\sin 3^\circ$ e di $\cos 3^\circ$.

Dobbiamo per prima cosa esprimere il dato argomento (3°) in radianti:

$$x = \frac{3}{57.3} \approx 0.052$$

Possiamo adesso fare uso delle approssimazioni valide per piccoli valori dell'argomento, ottenendo

$$\sin x \approx 0.052 \quad \cos x \approx 1 - \frac{(0.052)^2}{2} \approx 0.9986$$

Valori più precisi, ottenuti con un calcolatore elettronico, sono

$$\sin 3^\circ = 0.05233596 \quad \cos 3^\circ = 0.99862954$$

Si vede così che i valori stimati sono abbastanza bene confrontabili con i risultati più esatti.

Le quattro funzioni trigonometriche rimanenti — tangente, cotangente, secante e cosecante — si possono ottenere facilmente dal seno e/o dal coseno attraverso le relazioni seguenti:

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} & \sec x &= \frac{1}{\cos x} \\ \cot x &= \frac{\cos x}{\sin x} & \csc x &= \frac{1}{\sin x} \end{aligned}$$

Molti calcolatori elettronici consentono di calcolare direttamente la tangente (e la sua inversa, la cotangente), insieme col seno e col coseno.

Esempio 1.36. Valutare il seno, il coseno, la tangente, la cotangente, la secante e la cosecante dell'angolo di 0.75 radianti.

Utilizzando un calcolatore elettronico, si ottiene

$$\sin 0.75 = 0.68163876 \quad \cos 0.75 = 0.73168887$$

Le quattro funzioni rimanenti si possono poi valutare utilizzando le espressioni sopra presentate. Con ciò

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{0.68163876}{0.73168887} = 0.93159646 & \sec x &= \frac{1}{0.73168887} = 1.3667011 \\ \cot x &= \frac{1}{0.93159646} = 1.0734262 & \csc x &= \frac{1}{0.68163876} = 1.4670527 \end{aligned}$$

Tabella 1-1. Caratteristiche principali di funzioni algebriche e trigonometriche

Funzione	Andamento generale	Valori chiave	Approssimazione per piccoli valori dell'argomento
e^x	Cresce rapidamente al crescere di x ($x \geq 0$)	$e^0 = 1$ $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$	$e^x \approx 1+x$
e^{-x}	Decresce (tendendo a zero) al crescere di x ($x > 0$)	$e^0 = 1$ $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$	$e^{-x} \approx 1-x$
$\log x$	Cresce al crescere di x ($x > 0$) Assume valori negativi per valori frazionari di x ($0 < x < 1$) Tende a $-\infty$ per x tendente a 0 Non è definita per $x < 0$ $\log x = (0.434\ 294\ 48) \ln x$	$\log 1 = 0$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \log x = \infty$ $\lim_{x \rightarrow 0} \log x = -\infty$	
$\ln x$	Cresce al crescere di x ($x > 0$) Assume valori negativi per valori frazionari di x ($0 < x < 1$) Tende a $-\infty$ per x tendente a 0 Non è definita per $x < 0$ $\ln x = (2.302\ 585\ 1) \log x$	$\ln 1 = 0$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$ $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$	$\ln x \approx x - 1$ (x prossimo ad 1)
$\sin x$	Periodica con periodo 2π (radianti) Antisimmetrica, cioè $\sin(-x) = -\sin x$ $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$	$\sin 0 = 0$ $\sin(\pi/2) = 1$ $\sin \pi = 0$ $\sin(3\pi/2) = -1$ $\sin 2\pi = 0$	$\sin x \approx x$
$\cos x$	Periodica con periodo 2π (radianti) Simmetrica, cioè $\cos(-x) = \cos x$ $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$	$\cos 0 = 1$ $\cos(\pi/2) = 0$ $\cos \pi = -1$ $\cos(3\pi/2) = 0$ $\cos 2\pi = 1$	$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$

1.12 IL CALCOLATORE ELETTRONICO

Esistono attualmente molti tipi differenti di calcolatori elettronici tascabili sul mercato. Essi variano considerevolmente come prezzo e come complessità, andando dai semplici calcolatori economici « a quattro funzioni » (somma, sottrazione, moltiplicazione e divisione) ad una estremità dello spettro, a calcolatori programmabili, altamente sofisticati, all'altra estremità. Fra i due estremi vi sono i cosiddetti « regoli elettronici » o calcolatori « scientifici » (fig. 1-5). Questo tipo di calcolatore è adatto specialmente per gli studenti di scienze e di ingegneria.

Praticamente tutti i calcolatori scientifici includono un dispositivo per una notazione a virgola mobile e per una notazione scientifica. Un tipico calcolatore scientifico è in grado di visualizzare numeri grandi fino a $9.999\ 99 \times 10^{99}$ o piccoli fino a $0.000\ 01 \times 10^{-99}$. L'uso della notazione scientifica è tuttavia opzionale sulla maggior parte dei calcolatori.

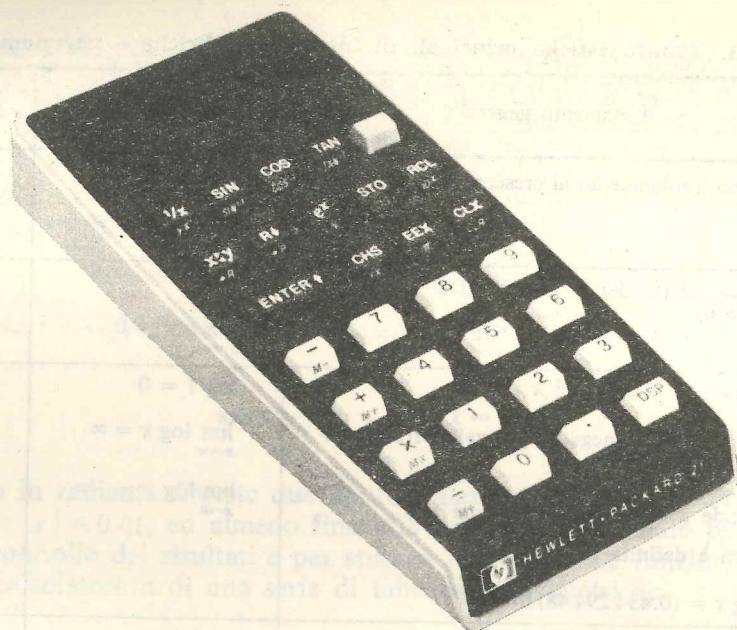


Fig. 1-5 Per cortesia della Hewlett-Packard.

Esempio 1.37. La quantità 0.00625 può venire introdotta in un calcolatore scientifico e visualizzata o nella forma convenzionale, come 0.00625, o secondo la notazione scientifica, come 6.25×10^{-3} .

La maggior parte dei calcolatori ha un visualizzatore o visore (*display*) ad 8 o a 10 cifre. In tal modo le quantità numeriche possono venire rappresentate con una precisione di otto o dieci cifre significative. Tuttavia, quando un numero è espresso secondo la notazione scientifica, le ultime tre cifre possono venire riservate all'esponente, per cui la mantissa può venire ridotta ad un numero di 5 o 7 cifre. (Alcuni calcolatori impiegano una mantissa ad 8 o 10 cifre ed in più un esponente segnato a 2 cifre). La mantissa è di solito espressa come un numero il cui valore assoluto è compreso fra 1 e 9.999...

Esempio 1.38. Vengono mostrati qui sotto diversi numeri come essi apparirebbero secondo la notazione convenzionale e secondo la notazione scientifica su un tipico calcolatore ad 8 cifre.

Notazione convenzionale	Notazione scientifica
1000.	1. 03
0.001	1.-03
123456.78	1.2346 05
-123456.78	-1.2346 05
0.00123456	1.2346-03
-0.00123456	-1.2346-03

Quando un numero viene convertito dalla notazione convenzionale a quella scientifica, la maggior parte dei calcolatori arrotonda automaticamente la mantissa, se necessario, come sopra illustrato.

Sistemi operativi

Il sistema operativo di un calcolatore stabilisce l'ordine in cui l'informazione viene introdotta nel calcolatore e l'ordine con cui i calcoli vengono eseguiti. Praticamente tutti i calcolatori scientifici fanno uso o del sistema operativo algebrico (AOS) o del sistema della notazione polacca inversa (RPN).

Sistema operativo algebrico

L'AOS consente di introdurre nel calcolatore le informazioni nello stesso ordine con cui il problema sarebbe scritto sulla carta.

Esempio 1.39. Eseguire il calcolo $5 + 3 - 6 = ?$ utilizzando un calcolatore elettronico scientifico AOS.

La sequenza di manipolazione AOS per eseguire questo calcolo è indicata qui sotto. (Ciascun quadrato contenente un simbolo rappresenta un tasto sulla tastiera del calcolatore).

Tasto	Visore
5	5.
+	5.
3	3.
-	8.
6	6.
=	2.

La risposta desiderata, 2, compare sul visore dopo che si è premuto il tasto $=$.

I calcolatori AOS fanno uso di una naturale gerarchia dei calcoli secondo cui si effettuano le operazioni nel seguente ordine:

1. valutazione di funzioni
2. elevazione a potenza
3. moltiplicazione e divisione
4. addizione e sottrazione

Questa gerarchia naturale accresce la capacità del calcolatore di eseguire le operazioni nello stesso ordine in cui sono scritte.

Esempio 1.40. Valutare la formula $y = 100 + 1200e^{-0.1}$, utilizzando un calcolatore elettronico AOS ad 8 cifre.

La sequenza di manipolazioni AOS è indicata qui sotto.

Tasto	Visore	Tasto	Visore
1	1.	0	1200.
0	10.	$\times$	1200.
0	100.	.	0.
+	100.	1	0.1
1	1.	$\div$	-0.1
2	12.	e^x	0.90483742
0	120.	=	1185.8049

Con ciò la risposta finale, con 8 cifre significative, è $y = 1185.8049$. Nel calcolo la funzione esponenziale viene valutata per prima, quindi questo valore viene moltiplicato per 1200 ed infine viene aggiunto 100 al prodotto.

Notare l'uso del tasto $\div$ per cambiare il segno del numero sul visore.

La maggior parte dei calcolatori AOS dispone di tasti per le parentesi aperta e chiusa. L'uso delle parentesi permette di non tener conto della gerarchia naturale, consentendo in tal modo di eseguire una lunga catena di operazioni in un ordine desiderato qualsiasi.

Esempio 1.41. Eseguire il calcolo seguente utilizzando un calcolatore elettronico scientifico AOS:

$$\frac{2 \times (8-3) \times \ln 4.8}{\sqrt{(1.63)^2 - (0.79)^2}} = ?$$

Un'efficiente sequenza di manipolazioni AOS è quella qui sotto indicata.

Tasto	Visore	Tasto	Visore
2	2.	1	1.
×	2.	.	1.
(	2.	6	1.6
8	8.	3	1.63
-	8.	x ²	2.6569
3	3.	-	2.6569
)	5.	.	0.
×	10.	7	0.7
4	4.	9	0.79
.	4.	x ²	0.6241
8	8.	)	2.0328
ln x	1.5686159	√x	1.425763
÷	15.686159	=	11.001941
(	15.686159		

In tal modo la risposta desiderata 11.001 941, compare sul visore dopo che è stato premuto il tasto $\boxed{=}$.

E' inteso che le sequenze di manipolazione mostrate negli esempi 1.39 - 1.41 sono *indicative*; in effetti vi possono essere piccole variazioni nelle sequenze di manipolazione fra un calcolatore AOS ed un altro.

Notazione polacca inversa

I calcolatori che fanno uso del sistema RPN contengono una « pila » di quattro registri (v. fig. 1-6). Ciascun registro può memorizzare un solo numero. Quando un numero viene introdotto nel calcolatore, è collocato al fondo della pila (nel registro X). Un numero che sia stato precedentemente nel registro X, verrà spostato in alto nel registro Y per fare posto al nuovo numero. Similmente, un numero originariamente collocato nel registro Y si sposterà in alto nel registro Z, ed un numero originariamente nel registro Z si sposterà nel registro T

(alla sommità della pila), sostituendo qualsiasi numero che ivi potesse essere stato in precedenza. Sul visore comparirà sempre il contenuto del registro X.

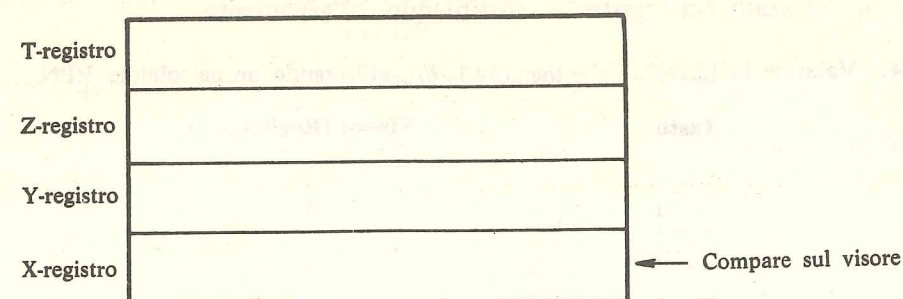


Fig. 1-6

Esempio 1.42. I numeri 1, 3, 5 e 7 sono stati introdotti in un calcolatore RPN in tale ordine. Viene poi introdotto il numero 9. I contenuti della pila, prima e dopo l'introduzione dell'ultimo numero, sono mostrati qui di seguito.

	Prima		Dopo
T	1	T	3
Z	3	Z	5
Y	5	Y	7
X	7 ← visualizzato	X	9 ← visualizzato

L'idea base nella notazione polacca inversa è che prima vengono introdotti i numeri e quindi viene effettuata l'operazione richiesta su di essi. Le operazioni aritmetiche saranno sempre effettuate sui numeri collocati nei registri X ed Y. I due operandi stessi saranno perduti, ma il risultato dell'operazione verrà memorizzato nel registro X (e quindi comparirà sul visore).

Esempio 1.43. Effettuare il calcolo seguente usando un calcolatore elettronico scientifico RPN:

$$5 + 3 - 6 = ?$$

La sequenza di manipolazioni RPN è indicata qui di seguito. (La freccia verticale indica il tasto usato per introdurre un numero nella pila dei registri).

Tasto	Visore (Registro X)
5	5.
↑	5.
3	3.
+	8.
6	6.
-	2.

La risposta desiderata, 2, compare così sul visore (il registro X) alla fine del calcolo. (Fare il confronto con l'esempio 1.39).

Per valutare una funzione con un calcolatore RPN, si deve per prima cosa collocarne l'argomento nel registro X. Premendo poi il tasto della funzione desiderata, il valore della funzione verrà memorizzato nel registro X, sostituendovi l'argomento.

Esempio 1.44. Valutare la formula $y = \log_{10}(5+3-6)$ utilizzando un calcolatore RPN.

Tasto	Visore (Registro X)
5	5.
↑	5.
3	3.
+	8.
6	6.
-	2.
log x	0.30103

La risposta desiderata è così $y = 0.30103$.

L'ordine con cui vengono effettuati i calcoli con un calcolatore RPN è sempre determinato dall'ordine con cui le istruzioni vengono introdotte e memorizzate nella pila dei registri. Non è quindi richiesta nessuna gerarchia prefissata delle operazioni, né vi è necessità di usare delle parentesi.

Esempio 1.45. Valutare la formula $y = 100 + 1200e^{-0.1}$ utilizzando un calcolatore RPN ad 8 cifre.

Tasto	Visore (Registro X)	Tasto	Visore (Registro X)
1	1.	↑	1200.
0	10.	.	0.
0	100.	1	0.1
↑	100.	+/-	-0.1
1	1.	e^x	0.90483742
2	12.	×	1085.8049
0	120.	+	1185.8049
0	1200.		

La risposta finale è quindi $y = 1185.8049$. (Fare il confronto con l'esempio 1.40).

Esempio 1.46. Effettuare il calcolo seguente usando un calcolatore elettronico scientifico RPN:

$$\frac{2 \times (8-3) \times \ln 4.8}{\sqrt{(1.63)^2 - (0.79)^2}} = ?$$

Un'efficiente sequenza di manipolazioni RPN è quella qui sotto indicata.

Tasto	Visore (Registro X)	Tasto	Visore (Registro X)
2	2.	.	1.
↑	2.	6	1.6
8	8.	3	1.63
↑	8.	x^2	2.6569
3	3.	↑	2.6569
-	5.	.	0.
×	10.	7	0.7
4	4.	9	0.79
.	4.	x^2	0.6241
8	4.8	-	2.0328
ln x	1.5686159	$\sqrt{x}$	1.4257630
×	15.686159	÷	11.001941
1	1.		

La risposta desiderata, 11.001 941, è così memorizzata nel registro X e compare sul visore dopo che è stato premuto il tasto $\div$. (Si faccia il confronto con l'esempio 1.41).

E' difficile dire quale dei due sistemi operativi sia meglio adatto per lo studente alle prime armi. Alcuni preferiscono la semplicità del sistema AOS, mentre altri sono più favorevoli alla concisione del sistema RPN. La considerazione più importante da farsi, nel confrontare i due sistemi, è quella di vedere quale consente all'utente di visualizzare più facilmente l'ordine appropriato di introduzione delle istruzioni e di effettuazione delle operazioni.

Calcolatori tascabili programmabili

Questi strumenti possono risultare molto utili per laureati in materie scientifiche e per ingegneri professionisti, particolarmente se si dispone di una libreria di programmi di uso frequente. Per contro i calcolatori programmabili sono costosi e difficili da programmare. (In effetti è molto più facile programmare un grosso calcolatore, facendo uso di un linguaggio algebrico di uso generale, come il BASIC o il FORTRAN. Diremo di più sull'argomento nel cap. 7). I calcolatori programmabili non sono quindi raccomandabili per lo studente di scienze o di ingegneria alle prime armi.

PROBLEMI RISOLTI

1.1. Scrivere ciascuno dei numeri seguenti secondo la notazione scientifica.

- (a) 0.85 (c) -2 607 566 (e) 0.007 171
(b) 923.049 (d) -50.63 (f) -0.000 000 043 9

- (a) 8.5×10^{-1} (c) $-2.607\,566 \times 10^6$ (e) 7.171×10^{-3}
(b) $9.230\,49 \times 10^2$ (d) -5.063×10^1 (f) -4.39×10^{-8}

1.2. Scrivere ciascuno dei numeri del problema 1.1 secondo la notazione normalizzata a virgola mobile.

- (a) 0.85E+0 (c) -0.260 756 6E+7 (e) 0.7171E-2
(b) 0.923 049E+3 (d) -0.5063E+2 (f) -0.439E-7

1.3. Scrivere ciascuno dei numeri seguenti secondo la notazione convenzionale.

- (a) 7.671×10^{-4} (c) 0.5482E+2 (e) $-5.052\,918 \times 10^4$
(b) -2.314×10^3 (d) 0.9745E+6 (f) -0.4070E-2
(a) 0.000 767 1 (c) 54.82 (e) -50 529.18
(b) -2314 (d) 974 500 (f) -0.004 070

1.4. Quante cifre significative sono presenti in ciascuno dei numeri seguenti?

- (a) 0.85 (c) -2 607 566 (e) 0.007 171
(b) 923.049 (d) 5.0000 (f) 0.0100
(a) due (c) sette (e) quattro
(b) sei (d) cinque (f) tre

1.5. Arrotondare ciascuno dei numeri seguenti a tre cifre significative.

- (a) 372.1 (c) -0.3415 (e) 72.749
(b) 5.719 (d) -2 607 566 (f) 0.408 52
(a) 372. (c) -0.342 (e) 72.7
(b) 5.72 (d) -2 610 000 (f) 0.409

1.6. Troncare ciascuno dei numeri dati nel problema 1.5 a tre cifre significative.

- (a) 372. (c) -0.341 (e) 72.7
(b) 5.71 (d) -2 600 000 (f) 0.408

1.7. Effettuare ciascuno dei calcoli sotto indicati.

- (a) $(5.264 \times 10^3) + (6.18 \times 10^2)$ (d) $(2.407 \times 10^7) \div (8.026 \times 10^5)$
(b) $(2.886 \times 10^{-3}) - (0.465 \times 10^{-2})$ (e) $(6.943 \times 10^4)^{0.5}$
(c) $(7.23 \times 10^{-4}) \times (3.033 \times 10^2)$

$$\begin{array}{r} (a) \quad 5.264 \times 10^3 \\ + 0.618 \times 10^3 \\ \hline 5.882 \times 10^3 \end{array}$$

La risposta corretta, con tre cifre significative, è 5.88×10^3 .

$$\begin{array}{r} (b) \quad 2.8860 \times 10^{-3} \\ - 4.65 \times 10^{-3} \\ \hline - 1.7640 \times 10^{-3} \end{array}$$

La risposta corretta, con tre cifre significative, è -1.76×10^{-3} .

$$(c) \quad (7.23 \times 3.033) \times 10^{-4+2} = 21.9 \times 10^{-2} = 0.219$$

(con tre cifre significative).

$$(d) \quad \frac{2.407}{8.026} \times 10^{7-5} = 0.2999 \times 10^2 = 29.99$$

(con quattro cifre significative).

$$(e) \quad (6.943)^{0.5} \times 10^{(0.5)(4)} = 2.635 \times 10^2 = 263.5$$

(con quattro cifre significative).

1.8. Valutare ciascuna delle funzioni seguenti.

- (a) $\sin(-38.4^\circ)$ (c) $e^{\ln 6}$ (e) $\ln 10$
(b) $\sec(-38.4^\circ)$ (d) $\tan 3.95 \text{ (rad)}$

$$(a) \quad \sin(-38.4^\circ) = -\sin 38.4^\circ = -0.621\,15$$

$$(b) \quad \sec(-38.4^\circ) = \frac{1}{\cos(-38.4^\circ)} = \frac{1}{\cos 38.4^\circ} = \frac{1}{0.783\,69} = 1.276\,01$$

$$(c) \quad e^{\ln 6} = 6$$

$$(d) \quad \tan 3.95 = \frac{\sin 3.95}{\cos 3.95} = \frac{-0.723\,19}{-0.690\,65} = 1.047\,11$$

$$(e) \quad \ln 10 = 2.302\,59 \log 10 = (2.302\,59)(1) = 2.302\,59$$

(Questa funzione può anche essere valutata direttamente, utilizzando una serie di tabelle o un calcolatore).

1.9. Valutare ciascuna delle funzioni seguenti facendo uso di un'opportuna approssimazione per argomenti sufficientemente piccoli.

- (a) $e^{0.005}$ (c) $\log 1.005$ (e) $\cos 0.005 \text{ (rad)}$
(b) $\ln 1.005$ (d) $\sin 0.005 \text{ (rad)}$ (f) $\tan 0.005 \text{ (rad)}$

$$(a) \quad e^{0.005} \approx 1 + 0.005 = 1.005$$

$$(b) \quad \ln 1.005 \approx 1.005 - 1 = 0.005$$

$$(c) \quad \log 1.005 = 0.434\,29 \ln 1.005 \approx (0.434\,29)(0.005) \approx 0.002$$

$$(d) \quad \sin 0.005 \approx 0.005$$

$$(e) \quad \cos 0.005 \approx 1 - \frac{(0.005)^2}{2} = 0.999\,987\,5$$

$$(f) \quad \tan 0.005 \approx \frac{0.005}{0.999\,987\,5} \approx 0.005$$

1.10. Ricavare una risposta approssimata per ciascuno dei problemi seguenti, senza fare uso di calcolatore o di dettagliati calcoli manuali.

$$(a) \quad \frac{1.669 \times 10^8 - 5.041 \times 10^7}{4.973 + 9.966 \times 10^{-2}} \quad (b) \quad \frac{\sqrt{48\,524 + 79\,456}}{598.8} \quad (c) \quad e^{-4.75/87.2} \sin\left(\frac{4.75}{65.4}\right)$$

- (a) $\frac{1.7 \times 10^8 - 0.5 \times 10^8}{5.0 + 0.1} = \frac{1.2}{5.1} \times 10^8 \approx 0.2 \times 10^8$
- (b) $\sqrt{\frac{4.9 \times 10^4 + 7.9 \times 10^4}{6.0 \times 10^2}} = \sqrt{\frac{12.8}{6.0} \times 10^1} \approx \sqrt{2.1 \times 10^1} \approx 1.45 \times 10^1 = 14.5$
- (c) $e^{-(4.8/8.7) \times 10^{-1}} \sin\left(\frac{4.8}{6.5} \times 10^{-1}\right) \approx e^{-0.055} \sin 0.075 \approx (1 - 0.055)(0.075) = (0.945)(0.75 \times 10^{-1}) \approx 0.07$

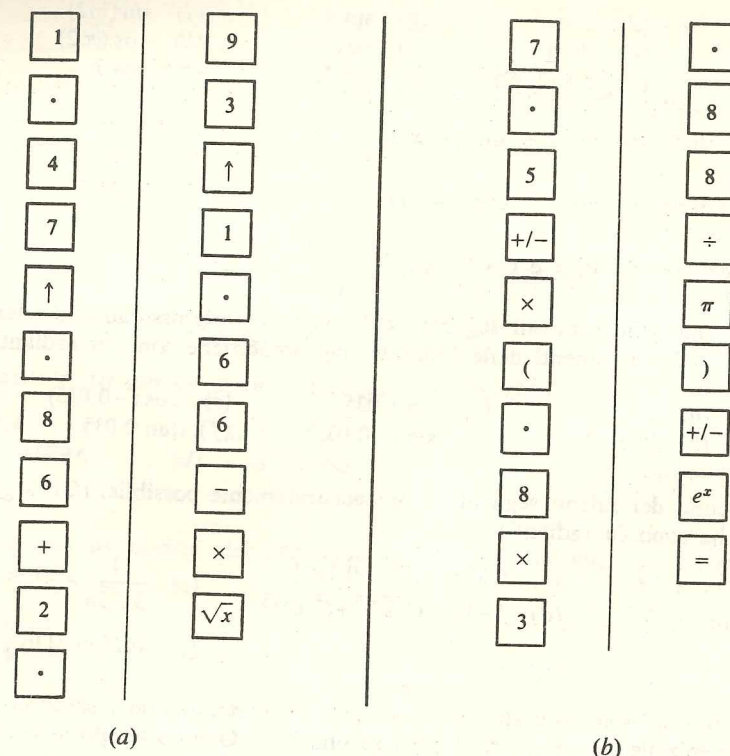
PROBLEMI SUPPLEMENTARI

Le risposte sono date alla fine del libro.

- 1.11. Scrivere ciascuno dei numeri secondo la notazione scientifica.
- | | | | |
|---------------------|-----------------|-------------|------------------|
| (a) -0.4214 | (c) 82.31 | (e) -414.03 | (g) 0.100 000 |
| (b) 0.000 005 029 6 | (d) -38 651 066 | (f) -0.1 | (h) -0.000 891 1 |
- 1.12. Scrivere ciascuno dei numeri del problema 1.11 secondo la notazione normalizzata a virgola mobile.
- 1.13. Scrivere ciascuna delle quantità seguenti secondo la notazione convenzionale.
- | | | | | |
|--------------------------|----------------|----------------------------|-----------------------------|---------------|
| (a) 2.0×10^{-1} | (c) 0.6776E-3 | (e) 1.748×10^{-4} | (g) -5.675×10^{-3} | (i) 0.2105E+8 |
| (b) -2.0×10^1 | (d) -0.6776E+2 | (f) 6.451×10^5 | (h) 0.1667E-6 | (j) -0.1E-1 |
- 1.14. Determinare il numero di cifre significative in ciascuna delle seguenti quantità.
- | | | | | |
|----------|------------|------------|----------------------------|---------------|
| (a) 100 | (c) -0.001 | (e) 0.1E+6 | (g) 2.408×10^{-4} | (i) 210 505 |
| (b) 100. | (d) 1.010 | (f) -0.100 | (h) -0.363 21E-12 | (j) 0.999 999 |
- 1.15. Arrotondare ciascuno dei numeri seguenti a tre cifre significative.
- | | | | | |
|----------------|--------------|------------|----------------|---------------|
| (a) 128.6 | (c) 0.998 54 | (e) 0.9999 | (g) 1.0051 | (i) -0.113 47 |
| (b) -0.004 832 | (d) 0.9995 | (f) 1.005 | (h) 42 581 712 | (j) 0.800 52 |
- 1.16. Troncare ciascuno dei numeri dati nel problema 1.15 a tre cifre significative.
- 1.17. Eseguire ciascuno dei calcoli sotto indicati.
- | | |
|---|---|
| (a) $(4.293 \times 10^{-4}) + (6.406 \times 10^{-5})$ | (f) $\frac{5.412 \times 10^6 + 9.539 \times 10^4}{4.412 \times 10^5 - 8.593 \times 10^6}$ |
| (b) $(3.130 \times 10^3) - (2.882 \times 10^2)$ | (g) $[(4.786 \times 10^{-2})(9.458 \times 10^{-1}) + (5.087 \times 10^{-1})(0.7079 \times 10^{-2})]^{-1/2}$ |
| (c) $(9.234 \times 10^9) \times (5.705 \times 10^{-2})$ | (h) $[(563.9)^2 + (69.7)^2 + (90.7)^2 + (200.8)^2]^{1/2}$ |
| (d) $(1.176 \times 10^{-3}) \div (1.346 \times 10^2)$ | |
| (e) $(4.852 \times 10^7)^{1/3}$ | |
- 1.18. Ricavare una risposta approssimata per ciascuno dei problemi seguenti, senza fare uso di un calcolatore o di dettagliati calcoli a mano.
- | | |
|---|---------------------|
| (a) $[(6.854 \times 10^6)(8.268 \times 10^{-8}) + (9.257 \times 10^{-4})(5.168 \times 10^3)]^{1/2}$ | (c) $(2.54)^6$ |
| (b) $\frac{8.941 \times 10^3 + 8.126 \times 10^4}{6.517 \times 10^5 - 6.448 \times 10^5}$ | (d) $(68.3)^{-0.8}$ |
- 1.19. Convertire da gradi a radianti: (a) 17.5° , (b) -200° , (c) 360° , (d) 500° .

- 1.20. Convertire da radianti a gradi: (a) 0.1, (b) 3, (c) -0.05, (d) 8.
- 1.21. Valutare ciascuna delle funzioni seguenti senza usare un calcolatore o fare riferimento al testo.
- | | | | | |
|-----------------|--------------------|-----------------|-------------------|--------------------|
| (a) e^0 | (d) $\ln 0$ | (g) $\sin \pi$ | (j) $\sin(\pi/2)$ | (m) $\sin(3\pi/2)$ |
| (b) $\log$ | (e) $\sin 0$ | (h) $\cos 0$ | (k) $\cos(\pi/2)$ | (n) $\cos 2\pi$ |
| (c) e^{-1000} | (f) $\cos(3\pi/2)$ | (i) $\sin 2\pi$ | (l) $\cos \pi$ | |
- 1.22. Qual è la relazione fra $\sin x$ e $\sin(-x)$?
- 1.23. Qual è la relazione fra $\cos x$ e $\cos(-x)$?
- 1.24. Qual è la relazione fra $\sin x$ e $\cos x$?
- 1.25. Valutare ciascuna delle funzioni seguenti utilizzando un'approssimazione adatta per piccoli valori dell'argomento. (Gli argomenti delle funzioni trigonometriche sono in radianti).
- | | | |
|------------------|--------------------|--------------------|
| (a) $e^{-0.035}$ | (c) $\log 1.035$ | (e) $\cos(-0.035)$ |
| (b) $\ln 1.035$ | (d) $\sin(-0.035)$ | (f) $\tan 0.035$ |
- 1.26. Eseguire ciascuno dei calcoli seguenti il più accuratamente possibile. (Gli argomenti delle funzioni trigonometriche sono in radianti).
- | | | |
|-----------------------------|--|--|
| (a) $\sin 5.62 + \cos 5.62$ | (c) $0.3e^2 + 0.7e^3 + 0.1e^{-1}$ | (e) $\frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-((8.50-1.67)^2/18)}$ |
| (b) $e^{-0.667} \sin 0.667$ | (d) $5 - \ln \sqrt{(1.87)^2 + (2.05)^2}$ | (f) $0.25 \cos\left(\ln \frac{\pi}{4}\right) + 0.75 \sin\left(\ln \frac{3\pi}{4}\right)$ |
- 1.27. Fare riferimento all'esempio 1.26. (a) Quale sarà la corrente dopo 1 secondo? (b) Quale frazione della corrente iniziale si conserverà dopo 5 secondi? (c) Quanto tempo dovrà trascorrere perché la corrente si riduca al 15% del suo valore iniziale? (d) Rappresentare schematicamente il diagramma della corrente in funzione del tempo.
- 1.28. Fare riferimento all'esempio 1.27. (a) Quale sarà la concentrazione di B dopo 3 ore? (b) Quale sarà la concentrazione di B dopo 10 ore? (c) In quale istante la concentrazione di B sarà massima? (d) Quale sarà la massima concentrazione di B? (e) Rappresentare schematicamente l'andamento della concentrazione di B in funzione del tempo.
- 1.29. Fare riferimento all'esempio 1.28. (a) Quale altezza d'acqua corrisponde ad una velocità di scarico di 0.04 m/s? (b) Quale sarà la velocità di scarico quando l'altezza dell'acqua nel recipiente è 0.10 m? (c) Rappresentare schematicamente un diagramma dell'altezza dell'acqua in funzione della velocità di scarico.
- 1.30. Fare riferimento all'esempio 1.29. (a) Determinare la temperatura al centro della barra 5 secondi dopo che la barra è stata immersa nel bagno d'olio. (b) Quale sarà la temperatura dopo 30 s? (c) Quale sarà la temperatura dopo un periodo di tempo molto lungo? (d) Quanto tempo occorrerà perché il centro della barra raggiunga 300°C ? (e) Rappresentare schematicamente l'andamento della temperatura della barra in funzione del tempo.
- 1.31. La caduta di tensione attraverso un'apparecchiatura elettronica può essere calcolata mediante la formula
- $$v = 0.5e^{-0.2t} \sin 0.1t$$
- dove v è la tensione, in mV, e t è il tempo, in s, contato a partire dal momento in cui viene chiuso l'interruttore di azionamento. (a) Determinare la caduta di tensione all'istante in cui l'interruttore di attivazione viene chiuso. (b) Determinare la caduta di tensione dopo 10 s. (c) Determinare la caduta di tensione dopo 1 min. (d) Stimare la caduta di tensione massima e determinare l'istante in cui questa caduta si verificherà. (e) Quale sarà la caduta di tensione dopo un periodo di tempo molto lungo? (f) Schematizzare il diagramma della caduta di tensione in funzione del tempo.

- 1.32. Le sequenze di manipolazione mediante le quali due problemi vengono risolti su calcolatori elettronici sono mostrate negli schemi seguenti. Per ciascuna problema, specificare il tipo di calcolatore usato (AOS o RPN) e determinare qual è il problema che viene risolto.



CAPITOLO 2

Unità e dimensioni

La soluzione di un problema tecnico deve non soltanto essere numericamente corretta, ma deve anche essere espressa nelle giuste unità. L'uso appropriato delle unità di misura, tuttavia, è talvolta fonte di confusione per lo studente alle prime armi, in quanto un risultato calcolato può spesso essere espresso in una qualsiasi di parecchie unità differenti, ed è molto facile scegliere inavvertitamente l'unità di misura sbagliata o commettere un errore nella conversione da un'unità all'altra.

Questo capitolo tratta i due sistemi di unità che vengono più spesso usati nei calcoli tecnici, il *sistema metrico internazionale* ed il *sistema degli ingegneri americano*. Viene pure fatto cenno ad alcune altre unità di misura metriche ed inglesi comunemente usate. Viene poi presentato un procedimento sistematico e razionale per la conversione da un sistema di unità ad un altro. Infine viene discussa in dettaglio l'importante questione della consistenza dimensionale.

2.1 DIMENSIONI FONDAMENTALI

Ogni sistema di unità è basato su un gruppo di *dimensioni fondamentali* (chiamate anche *dimensioni di riferimento* o *dimensioni base*) da cui vengono derivate tutte le altre dimensioni. Nell'ambito di un dato sistema di unità, ciascuna dimensione fondamentale è espressa mediante una sua propria particolare unità.

Esempio 2.1. Il sistema metrico internazionale è basato sulle sette dimensioni fondamentali seguenti: *lunghezza, massa, tempo, corrente elettrica, temperatura assoluta (termodinamica), intensità luminosa e quantità di sostanza*. Quest'ultima dimensione, che mancava nelle precedenti versioni del sistema, può essere ignorata nella maggior parte dei casi.

In alcuni sistemi di unità, la forza può essere sostituita alla massa o la carica elettrica alla corrente elettrica. Il sistema degli ingegneri americano include sia la forza che la massa fra le dimensioni fondamentali.

Esempio 2.2. Il sistema degli ingegneri americano è basato sulle sette dimensioni fondamentali seguenti: *lunghezza, massa, tempo, forza, carica elettrica, temperatura assoluta (termodinamica) ed intensità luminosa*. Inoltre la maggior parte di queste dimensioni viene espressa in unità differenti da quelle delle dimensioni corrispondenti nel sistema metrico internazionale (per es., l'unità metrica di lunghezza è il *metro*, mentre l'unità di lunghezza degli ingegneri americana è il *pie* « foot »).

E' conveniente rappresentare ciascuna dimensione fondamentale col suo proprio *simbolo* racchiuso entro parentesi quadre. Questi simboli, che sono indipendenti da qualsiasi particolare sistema di unità, sono elencati nella tab. 2-1. Si deve notare che nessun singolo sistema di unità include tutte le dimensioni fondamentali indicate nella tab. 2-1.

Tabella 2-1

Dimensione fondamentale	Simbolo	Dimensione fondamentale	Simbolo
lunghezza	[L]	carica elettrica	[Q]
massa	[M]	corrente elettrica	[A]
tempo	[T]	temperatura (assoluta)	[θ]
forza	[F]	intensità luminosa	[I]

2.2 DIMENSIONI DERIVATE

La maggior parte delle dimensioni nell'ambito di un dato sistema di unità è definita mediante una certa combinazione di due o più dimensioni fondamentali. Tali dimensioni sono dette *dimensioni derivate*. In simboli, una dimensione derivata può essere espressa come prodotto o quoziente fra due o più simboli fondamentali.

Esempio 2.3. (a) L'area può essere definita come il prodotto di una lunghezza per un'altra (cioè lunghezza per larghezza). In simboli, ciò può essere espresso come $[L \cdot L]$, o semplicemente $[L^2]$. (b) La velocità è definita come la distanza percorsa (in una particolare direzione) per unità di tempo. In simboli, ciò può essere espresso come $[L/T]$ (lunghezza divisa per un tempo). Con ciò la velocità è una dimensione derivata

La tab. 2-2 mostra le rappresentazioni simboliche per un certo numero delle più comuni dimensioni derivate. Alcune di queste dimensioni derivate possono venire espresse in modi differenti, a seconda della particolare scelta delle dimensioni fondamentali. Voci multiple sono indicate in questi casi.

Tabella 2-2

Dimensione derivata	Simbolo
area	$[L^2]$
volume	$[L^3]$
massa	$[FT^2/L]$
forza	$[ML/T^2]$
velocità	$[L/T]$
accelerazione	$[L/T^2]$
velocità angolare	$[T^{-1}]$ (radianti per unità di tempo)
accelerazione angolare	$[T^{-2}]$ (radianti per unità di tempo per unità di tempo)
momento (o quantità di moto)	$[ML/T]$ ovvero $[FT]$
pressione	$[M/LT^2]$ ovvero $[F/L^2]$
sforzo	$[M/LT^2]$ ovvero $[F/L^2]$
energia (lavoro)	$[ML^2/T^2]$ ovvero $[FL]$
momento di una forza	$[ML^2/T^2]$ ovvero $[FL]$
potenza	$[ML^2/T^3]$ ovvero $[FL/T]$
densità	$[M/L^3]$ ovvero $[FT^2/L^4]$
viscosità	$[M/LT]$ ovvero $[FT/L^2]$
viscosità cinematica	$[L^2/T]$
capacità termica	$[L^2/T\theta]$
conducibilità termica	$[ML/T^3\theta]$ ovvero $[F/T\theta]$
frequenza	$[T^{-1}]$ (cicli per unità di tempo)
carica elettrica	$[AT]$
corrente elettrica	$[Q/T]$
potenziale elettrico (tensione)	$[ML^2/AT^3]$, $[ML^2/QT^2]$, $[FL/AT]$ ovvero $[FL/Q]$
resistenza elettrica	$[ML^2/A^2T^3]$, $[ML^2/Q^2T]$, $[FL/A^2T]$ ovvero $[FLT/Q^2]$
capacità elettrica	$[A^2T^4/ML^2]$, $[Q^2T^2/ML^2]$, $[A^2T^3/FL]$ ovvero $[Q^2/FL]$
induttanza elettrica	$[ML^2/A^2T^2]$, $[ML^2/Q^2]$, $[FL/A^2]$ ovvero $[FLT^2/Q^2]$

Esempio 2.4. Il lavoro è definito come il prodotto di una forza per una distanza (nella direzione della forza). In un sistema di unità che include la forza come dimensione fondamentale, come è ad es. il sistema degli ingegneri americano, il lavoro può essere espresso semplicemente come $[FL]$. Se la forza è una dimensione derivata, come nel sistema metrico internazionale, allora essa deve essere espressa in

simboli nella forma $[ML/T^2]$ (cioè massa per accelerazione, dove l'accelerazione ha le dimensioni $[L/T^2]$). Quindi la rappresentazione simbolica del lavoro diventa

$$[ML/T^2] \cdot [L] = [ML^2/T^2]$$

E' importante notare che il lavoro ha le stesse unità dell'energia. Quindi l'energia può essere espressa in simboli come $[FL]$ o come $[ML^2/T^2]$, a seconda del particolare sistema di unità. Entrambe queste forme sono incluse nella tab. 2-2.

Esempio 2.5. Il potenziale elettrico può essere definito come lavoro per unità di carica elettrica. Ora, il lavoro può essere espresso in termini o di forza $[F]$ o di massa $[M]$, e la carica elettrica può o essere presa come una dimensione fondamentale $[Q]$ o venire espressa in termini di corrente elettrica $[A]$. Ciò comporta $2 \times 2 = 4$ modi di rappresentare in simboli il potenziale elettrico, come è mostrato nella tab. 2-2.

Nell'ambito di un dato sistema di unità, molte dimensioni derivate saranno espresse in termini di singole unità. E' importante ricordare che tali unità sono sempre definite in termini di altre unità che rappresentano dimensioni fondamentali.

Esempio 2.6. Nel sistema metrico internazionale l'unità di forza è il newton (N). Come si è mostrato nell'esempio 2.4,

$$[F] = [ML/T^2]$$

Le dimensioni fondamentali a secondo membro hanno come unità il chilogrammo (kg), il metro (m) ed il secondo (s), rispettivamente. Quindi

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

2.3 IL SISTEMA METRICO INTERNAZIONALE (UNITA' SI)

Il sistema metrico internazionale o SI, come viene universalmente abbreviato, è una variante del sistema metrico mks (metro - k-grammo - secondo), che è stato usato nelle scienze naturali per molti anni. L'SI serve ora come riferimento per i calcoli di ingegneria nella maggior parte del mondo. Nei paesi di lingua inglese, tuttavia, le associazioni di ingegneria hanno fatto uso storicamente di un sistema di unità completamente differente. In questi paesi si stanno ora compiendo molti sforzi per sostituire tutti gli altri sistemi di unità con l'SI.

La tab. 2-3 elenca le unità base dell'SI (che rappresentano dimensioni fondamentali) e la Tab. 2-4 definisce una buona parte delle più comuni unità derivate.

Tabella 2-3. Unità base dell'SI

Dimensione fondamentale	Unità base
lunghezza $[L]$	metro (m)
massa $[M]$	chilogrammo (kg)
tempo $[T]$	secondo (s)
corrente elettrica $[A]$	ampere (A)
temperatura $[\theta]$	kelvin (K)
intensità luminosa $[I]$	candela (cd)
quantità di sostanza	mole (mol)

Esempio 2.7. (a) Le definizioni nella tab. 2-4 coinvolgono non soltanto unità base, ma anche unità derivate già definite. Così

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 (\text{kg} \cdot \text{m/s}^2) \cdot \text{m} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$$

e questa espressione per il joule in termini di unità base è in accordo con $[ML^2/T^2]$, le dimensioni dell'energia. (b) La definizione del lumen coinvolge una delle due unità supplementari dell'SI, lo steradiano (sr)

E' questa un'unità di angolo solido tale che al centro di una sfera l'angolo solido sotteso dalla superficie sia 4π steradiani. L'altra unità supplementare è il *radiante* (rad), che misura angoli piani.

Tabella 2-4. Unità derivate dell'SI

Dimensione derivata	Unità	Definizione
forza $[ML/T^2]$	newton (N)	$kg \cdot m/s^2$
pressione $[M/LT^2]$	pascal (Pa)	N/m^2
energia $[ML^2/T^2]$	joule (J)	$N \cdot m$
potenza $[ML^2/T^3]$	watt (W)	J/s
frequenza $[T^{-1}]$	hertz (Hz)	s^{-1}
carica elettrica $[AT]$	coulomb (C)	$A \cdot s$
potenziale elettrico $[ML^2/AT^3]$	volt (V)	W/A
resistenza elettrica $[ML^2/A^2T^3]$	ohm (Ω)	V/A
capacità elettrica $[A^2T^4/ML^2]$	farad (F)	$A \cdot s/V$
induttanza elettrica $[ML^2/A^2T^2]$	henry (H)	$V \cdot s/A$
flusso magnetico $[ML^2/AT^2]$	weber (Wb)	$V \cdot s$
densità di flusso magnetico $[M/AT^2]$	tesla (T)	Wb/m^2
flusso luminoso $[I]$	lumen (lm)	$cd \cdot sr$
illuminazione $[I/L^2]$	lux (lx)	lm/m^2

- Esempio 2.8.** (a) Una massa di 4 kg viene accelerata a 3 m/s^2 . La forza corrispondente è
 $(4 \text{ kg})(3 \text{ m/s}^2) = 12 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 12 \text{ N}$
- (b) La carica elettrica richiesta per produrre una corrente di 5 ampere per 3 secondi è
 $(5 \text{ A})(3 \text{ s}) = 15 \text{ A} \cdot \text{s} = 15 \text{ C}$

Altre unità metriche

Vi sono due unità metriche di uso comune non incluse nella tab. 2-4. Il *grado Celsius* ($^{\circ}\text{C}$) è identico in valore assoluto al kelvin (K). Esso viene usato per misurare temperature od intervalli di temperatura sulla scala Celsius, che differisce dalla scala Kelvin soltanto nella scelta del punto zero. Le due scale sono collegate dalla

$$\theta_c = \theta_K - 273.15$$

L'acqua, a livello del mare, congelerà a 0°C e bollerà a 100°C .

- Esempio 2.9.** Qual è il punto di ebollizione normale dell'acqua in Kelvin?
L'acqua normalmente bolle a 100°C (a livello del mare). Conseguentemente
 $\theta_K = \theta_c + 273.15 = 100 + 273.15 = 373.15$

Il punto di ebollizione dell'acqua è quindi approssimativamente 373 K.

La *chilocaloria* è definita come il calore (l'energia) richiesto per innalzare la temperatura di 1 kg di acqua di 1 K (ovvero di 1°C). 1 kcal equivale a 4184 joule.

- Esempio 2.10.** Quanta energia è richiesta per innalzare la temperatura di 5 kg di acqua da 300 K a 350 K?
La quantità di energia richiesta è proporzionale alla massa dell'acqua ed all'aumento di temperatura dell'acqua stessa:
- $$\begin{aligned} \text{energia} &= (\text{massa}) \times (\text{calore specifico}) \times (\text{aumento di temperatura}) \\ &= (5 \text{ kg})(1 \text{ kcal/kg} \cdot \text{K})(350 \text{ K} - 300 \text{ K}) = 250 \text{ kcal} \end{aligned}$$

Convertendo questo risultato in joule, si ha

$$\text{energia} = (250 \text{ kcal})(4184 \text{ J/kcal}) = 1.046 \times 10^6 \text{ J}$$

Così, per innalzare la temperatura di 5 kg di acqua di 50 K è necessario circa un milione di joule. Una più attenta discussione su come convertire le unità verrà fatta nel par. 2.5.

Prefissi dell'SI

L'SI fa anche uso di prefissi delle unità, che rappresentano moltiplicatori decimali delle unità a cui sono preposti. La tab. 2-5 contiene i prefissi dell'SI più comunemente usati.

Tabella 2-5

Prefisso	Moltiplicatore decimale	Simbolo
giga	10^9	G
mega	10^6	M
kilo	10^3	k
deci*	10^{-1}	d
centi*	10^{-2}	c
milli	10^{-3}	m
micro	10^{-6}	μ
nano	10^{-9}	n
pico	10^{-12}	p

* permesso, ma non preferito

- Esempio 2.11.** (a) Un *megawatt* (MW) è uguale a 1.000.000 W, poiché il prefisso *mega* rappresenta il moltiplicatore 10^6 . (b) Un *centimetro* (cm) è uguale a 0.01 m, poiché il prefisso *centi* rappresenta il moltiplicatore 10^{-2} . Vi sono quindi 100 centimetri in un metro. (c) Un *microsecondo* (μs) è uguale a 10^{-6}s , poiché il prefisso *micro* rappresenta il moltiplicatore 10^{-6} . Si vede così che un secondo contiene 1.000.000 di microsecondi.

2.4 IL SISTEMA DEGLI INGEGNERI AMERICANO

Il *sistema degli ingegneri americano* è una variante del sistema di unità inglese fps (foot - piede, pound - libbra, secondo). Ancora diverse decadi potranno essere necessarie prima che questo sistema sia sostituito dall'SI nei paesi di lingua inglese. Considereremo quindi il sistema degli ingegneri americano abbastanza dettagliatamente.

La tab. 2-6 indica le unità base che rappresentano le varie dimensioni fondamentali del sistema degli ingegneri americano. Alcune delle più comuni dimensioni derivate sono mostrate nella tab. 2-7. Certe altre dimensioni derivate, come il potenziale elettrico, la resistenza elettrica, il flusso magnetico ed il flusso luminoso, utilizzano le stesse unità dell'SI (cioè volt, ohm, weber e lumen). L'unità base del tempo, il secondo, e l'unità derivata *ora* sono le stesse nell'SI e nel sistema degli ingegneri americano. Tuttavia queste unità vengono abbreviate nell'SI con s ed h, mentre nel sistema americano le abbreviazioni usuali sono sec ed hr.

Tabella 2-6. Unità base del sistema degli ingegneri americano

Dimensione fondamentale	Unità base
lunghezza $[L]$	foot (ft) = piede
massa $[M]$	pound (lb _m) = libbra-massa
tempo $[T]$	secondo (sec)
forza $[F]$	pound (lb _f) = libbra-forza
carica elettrica $[Q]$	coulomb (C)
temperatura $[\theta]$	grado Rankine ($^{\circ}\text{R}$)
intensità luminosa $[I]$	candela (cd)

Tabella 2-7. Unità derivate del sistema degli ingegneri americano

Dimensione derivata	Unità	Definizione
densità	—	lb _m /ft ³
pressione	—	lb _f /ft ²
energia	—	ft • lb _f
potenza	—	ft • lb _f /sec
corrente elettrica [Q/T]	ampere (A)	C/sec

La massa e la forza sono considerate entrambe dimensioni fondamentali nel sistema degli ingegneri americano. A complicare ulteriormente le cose, l'unità base per ciascuna di queste dimensioni è la *libbra*. Vi sono così unità di *libbra-massa* (lb_m) e di *libbra-forza* (lb_f) nel sistema degli ingegneri americano. La relazione fra di esse è che una massa di una libbra (1 lb_m) sarà sottoposta ad una forza gravitazionale di una libbra (cioè peserà 1 lb_f) sulla terra, a livello del mare e ad una latitudine di 45°.

Esempio 2.12. Determinare il peso di (a) una massa di 5 lb_m e (b) una massa di 5 kg, a livello del mare e ad una latitudine di 45°.

- (a) Poiché 1 lb_m peserà 1 lb_f in queste condizioni, 5 lb_m peseranno 5 lb_f.
 (b) Nell'SI, la forza, dimensione derivata, è definita dalla seconda legge del moto di Newton nella forma ben nota $F = ma$. L'accelerazione di gravità a livello del mare e ad una latitudine di 45° vale 9.807 m/s². Ne segue che il peso della massa di 5 kg sarà

$$(5 \text{ kg})(9.807 \text{ m/s}^2) = 49.035 \text{ N}$$

Si noti che in (a) la costante di gravitazione universale (32.174 ft/sec²) non interveniva nella conversione da libbre-massa a libbre-forza (peso). La costante di gravitazione universale metrica (9.807 m/s²) è invece necessaria per convertire i chilogrammi in newton.

Se, nel sistema degli ingegneri americano, si tenta di usare la seconda legge di Newton nella forma $F = ma$, la forza risulta espressa in *poundal*, che non è un'unità base, qualora la massa sia espressa in lb_m. Cioè a dire che

$$1 \text{ poundal} = 1 \text{ lb}_m \cdot \text{ft/sec}^2$$

Per effettuare una conversione da poundal a lb_f, si deve dividere per la *costante di gravitazione universale*, che è $g_c = 32.174 \text{ poundals/lb}_f = 32.174 \text{ lb}_m \cdot \text{ft/lb}_f \cdot \text{sec}^2$. (Questo valore equivale numericamente all'accelerazione di gravità sulla terra, a livello del mare e ad una latitudine di 45°). Così, nel sistema degli ingegneri americano, la forma corretta della seconda legge di Newton è

$$F = \frac{ma}{g_c}$$

Esempio 2.13. Determinare il peso di una massa di 5 lb_m sulla superficie della luna, dove l'accelerazione di gravità è circa 1/6 del valore terrestre.

La seconda legge di Newton dà

$$F = \frac{ma}{g_c} = \frac{(5 \text{ lb}_m)(\frac{1}{6} \times 32.174 \text{ ft/sec}^2)}{32.174 \text{ lb}_m \cdot \text{ft/lb}_f \cdot \text{sec}^2} = \frac{5}{6} \text{ lb}_f$$

Si noti che le unità lb_m•ft/sec² (ovvero i poundal) si semplificano nel calcolo, lasciando soltanto le unità desiderate, le lb_f. Anche il valore numerico 32.174 scompare nel conto. Con ciò il risultato corretto può essere ottenuto semplicemente scrivendo

$$F = (5)(\frac{1}{6}) = \frac{5}{6} \text{ lb}_f$$

anche se le conversioni di unità non sono indicate esplicitamente.

L'uso del sistema degli ingegneri americano è particolarmente semplice dove non sono richieste conversioni fra massa e forza.

Esempio 2.14. Quanto lavoro viene compiuto quando una forza di 25 lb_f è applicata per una distanza di 40 ft?

Il lavoro è il prodotto della forza per la distanza, e quindi

$$\text{lavoro} = (25 \text{ lb}_f)(40 \text{ ft}) = 1000 \text{ ft} \cdot \text{lb}_f$$

Esempio 2.15. Determinare la corrente elettrica corrispondente ad un flusso uniforme di 10 C per un periodo di 5 s.

La corrente elettrica è definita come la quantità di carica elettrica che passa per un punto fisso per unità di tempo. Così

$$\text{corrente} = \frac{10 \text{ C}}{5 \text{ s}} = 2 \text{ C/s} = 2 \text{ A}$$

Altre unità inglesi

Vi sono molte altre unità inglesi usate nei calcoli tecnici che, pur non essendo espressamente incluse nel sistema degli ingegneri americano, possono essere date in termini di unità base del sistema degli ingegneri. Per esempio, il volume può venire espresso in *galloni*, la pressione in *atmosfera*, l'energia in *Btu*, ecc. La tab. 2-8 elenca un certo numero delle unità inglesi di questo tipo fra le più comunemente usate.

Tabella 2-8. Unità inglesi di uso comune

Dimensione	Unità	Definizione
lunghezza [L]	pollice (in)	12 in = 1 ft
	iarda (yd)	1 yd = 3 ft
	miglio (mi)	1 mi = 5280 ft
area [L ²]	acro	1 acre = 43 560 ft ²
volume [L ³]	gallone (gal)	7.480 52 gal = 1 ft ³
massa [M]	oncia (oz)	16 oz = 1 lb _m
	tonnellata	1 ton = 2000 lb _m
	minuto (min)	1 min = 60 sec
tempo [T]	ora (hr)	1 hr = 60 min = 3600 sec
	giorno	1 day = 24 hr = 86 400 sec
	grado Fahrenheit (°F)	1 °F = 1 °R $\theta_F = \theta_R - 459.67$
pressione [F/L ²]	lb/in ² (psi)	1 psi = 144 lb _f /ft ²
	atmosfera (atm)	1 atm = 14.696 psi = 2116.224 lb _f /ft ²
potenza [FL/T]	cavalli vapore (hp)	1 hp = 550 ft • lb _f /sec
energia [FL]	unità termica inglese (Btu)	1 Btu = 777.65 ft • lb _f
	cavalli vapore-ora (hp•hr)	1 hp • hr = 1.98 × 10 ⁶ ft • lb _f
	kilowatt-ora (kW•hr)	1 kW • hr = 2.655 22 × 10 ⁶ ft • lb _f

Esempio 2.16. Quanti galloni d'acqua possono essere contenuti in un cilindro avente un raggio (r) di 2 ft ed un'altezza (h) di 5 ft?

Il volume del cilindro è dato dalla

$$V = \pi r^2 h = (3.141 59)(2)^2(5) = 62.831 85 \text{ ft}^3$$

Dalla tab. 2-8, 7.480 52 gal = 1 ft³. Conseguentemente

$$V = (62.831 85 \text{ ft}^3)(7.480 52 \text{ gal/ft}^3) = 470.015 \text{ gal}$$

Si conclude che il cilindro conterrà circa 470 galloni d'acqua.

Esempio 2.17. Quanta energia è necessaria per innalzare la temperatura di 5 lb_m di acqua da 300 °R a 350 °R?

L'unità termica inglese (Btu) è un'unità di energia definita come il calore necessario per innalzare di 1 °R (o di 1 °F) la temperatura di 1 lb_m di acqua. Questa definizione è analoga a quella della chilocaloria data nel par. 2.3. Perciò, come nell'esempio 2.10,

$$\text{energia} = (5 \text{ lb}_m)(1 \text{ Btu/lb}_m \cdot ^\circ\text{R})(350 ^\circ\text{R} - 300 ^\circ\text{R}) = 250 \text{ Btu}$$

Poiché 1 Btu = 777.65 ft · lb_f (dalla tab. 2-8), si ottiene

$$\text{energia} = (250 \text{ Btu})(777.65 \text{ ft} \cdot \text{lb}_f/\text{Btu}) = 1.94 \times 10^5 \text{ ft} \cdot \text{lb}_f$$

Sono così richiesti circa 194.000 ft·lb_f per innalzare la temperatura di 5 lb_m di acqua di 50 °R. Il che equivale a circa 263.000 joule (si confronti con l'esempio 2.10).

2.5 CONVERSIONI DI UNITÀ

Frequentemente il principiante è portato a tentare di convertire le unità facendo uso di metodi intuitivi, abbastanza fortuiti, col risultato di cadere spesso in risposte non corrette. In questo paragrafo viene presentato un metodo sistematico di conversione delle unità, basato sull'impiego delle *equivalenze fra le unità*. Una raccolta di equivalenze fra le unità (che include alcuni dei fattori presentati nelle tab. 2-4 e 2-8) è data nell'appendice A.

Esempio 2.18. Quanti piedi quadrati equivalgono ad 1 chilometro quadrato?

Dalla prima voce nell'appendice A, si vede che

$$43\,560 \text{ ft}^2 = 4.046\,856 \times 10^{-3} \text{ km}^2$$

Se allora si dividono entrambi i membri per $4.046\,856 \times 10^{-3}$, si ottiene

$$\frac{4.356 \times 10^4}{4.046\,856 \times 10^{-3}} \text{ ft}^2 = 1 \text{ km}^2$$

ovvero

$$1.076\,391 \times 10^7 \text{ ft}^2 = 1 \text{ km}^2$$

Perciò 1 chilometro quadrato equivale a 10.763.910 piedi quadrati.

Un altro modo di risolvere questo problema è quello di fare uso delle informazioni elencate nell'appendice A sotto la dimensione *lunghezza*. Così 1 km = 1000 m ed 1 m = 3.280 84 ft. Se si moltiplica la seconda equivalenza per 1000, si ottiene

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m} = 3.280\,84 \times 10^3 \text{ ft}$$

Elevando entrambi i membri al quadrato

$$1 \text{ km}^2 = 10.763\,91 \times 10^6 \text{ ft}^2 = 1.076\,391 \times 10^7 \text{ ft}^2$$

che è lo stesso risultato ottenuto in precedenza.

E' spesso opportuno scrivere un'equivalenza fra unità come una frazione, detta *fattore di equivalenza o fattore di conversione*. Un fattore di conversione ha il valore uno nelle moltiplicazioni.

Esempio 2.19. Ancora con riferimento alla prima voce dell'appendice A, si vede che

$$1 \text{ acre} = 43\,560 \text{ ft}^2 = 4.046\,856 \times 10^{-3} \text{ km}^2$$

In base a questa informazione, si possono costruire i fattori di conversione seguenti:

$$\begin{array}{rcl} \frac{1 \text{ acre}}{43\,560 \text{ ft}^2} & & \frac{43\,560 \text{ ft}^2}{1 \text{ acre}} \\ \frac{1 \text{ acre}}{4.046\,856 \times 10^{-3} \text{ km}^2} & & \frac{4.046\,856 \times 10^{-3} \text{ km}^2}{1 \text{ acre}} \\ \frac{43\,560 \text{ ft}^2}{4.046\,856 \times 10^{-3} \text{ km}^2} & & \frac{4.046\,856 \times 10^{-3} \text{ km}^2}{43\,560 \text{ ft}^2} \end{array}$$

Per effettuare una conversione di unità, la quantità data viene moltiplicata per uno o per più fattori di conversione. Il prodotto finale risulterà espresso mediante le unità desiderate purché i fattori di conversione siano stati scelti opportunamente. Questi fattori devono essere scelti in modo tale che le unità *originarie (date)* si *semplifichino* l'una con l'altra, lasciando in gioco soltanto le nuove unità (quelle desiderate)

Esempio 2.20. Quanti acri equivalgono a 15 chilometri quadrati?

Questo problema può essere risolto facilmente utilizzando l'appropriato fattore di conversione desumibile dall'esempio 2.19:

$$(15 \text{ km}^2) \left(\frac{1 \text{ acre}}{4.046\,856 \times 10^{-3} \text{ km}^2} \right) = 3.706\,581 \times 10^3 \text{ acres}$$

Così 15 chilometri quadrati equivalgono a circa 3707 acri.

Si noti che il fattore di conversione è stato scelto in modo tale che le unità date (km²) compaiano sia al numeratore sia al denominatore, cancellandosi così l'una con l'altra. Questa semplificazione lascia in gioco soltanto le unità acri, come si voleva.

Esempio 2.21. Quante dine equivalgono ad una forza di 50 libbre?

Dalla voce *forza* dell'appendice A si ottiene

$$(50 \text{ lb}_f) \left(\frac{4.448\,22 \text{ N}}{1 \text{ lb}_f} \right) \left(\frac{1 \text{ dyne}}{10^{-5} \text{ N}} \right) = 2.224\,11 \times 10^7 \text{ dynes}$$

In alternativa, si può scrivere

$$(50 \text{ lb}_f) \left(\frac{1 \text{ N}}{0.224\,809 \text{ lb}_f} \right) \left(\frac{1 \text{ dyne}}{10^{-5} \text{ N}} \right) = 2.224\,11 \times 10^7 \text{ dynes}$$

Esempio 2.22. Convertire una potenza di uscita di 10 megawatt in un numero equivalente di Btu per ora.

Con riferimento alle voci *potenza* dell'appendice A, si può scrivere

$$(10 \text{ MW}) \left(\frac{10^6 \text{ W}}{1 \text{ MW}} \right) \left(\frac{1 \text{ Btu/hr}}{0.292\,875 \text{ W}} \right) = 3.414\,426 \times 10^7 \text{ Btu/hr}$$

Così 10 megawatt equivalgono a circa 34 milioni di Btu/hr.

Esempio 2.23. La capacità termica di una sostanza vale 0.285 Btu/lb_m · °F. Esprimere la capacità termica in termini di J/kg·K.

L'appendice A contiene le richieste equivalenze fra le unità elencate sotto la voce *capacità termica*. Così,

$$(0.285 \text{ Btu/lb}_m \cdot ^\circ\text{F}) \left(\frac{1 \text{ J/kg} \cdot \text{K}}{2.390\,06 \times 10^{-4} \text{ Btu/lb}_m \cdot ^\circ\text{F}} \right) = 1192.44 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$$

Il calcolo precedente era molto semplice poiché si aveva un unico fattore di conversione che consentiva di effettuare direttamente la conversione dalle unità date alle unità desiderate. Se non sono disponibili fattori di conversione di unità multiple di questo tipo, il calcolo può essere effettuato utilizzando diversi fattori di conversione di unità singole come segue:

$$(0.285 \text{ Btu/lb}_m \cdot ^\circ\text{F}) \left(\frac{1054.35 \text{ J}}{1 \text{ Btu}} \right) \left(\frac{2.204\,62 \text{ lb}_m}{1 \text{ kg}} \right) \left(\frac{1.8 ^\circ\text{F}}{1 \text{ K}} \right) = 1192.44 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$$

Tutti i fattori di conversione di unità singole che compaiono in questo calcolo sono state ricavate dall'appendice A, anche se avrebbero potuto essere desunte da molte altre fonti. Una raccolta sotto forma di tabella particolarmente completa dei fattori di conversione si può trovare in edizioni recenti del *Manuale di Chimica e di Fisica*, pubblicato annualmente dalla Chemical Rubber Co. di Cleveland, Ohio.

2.6 CONSISTENZA DIMENSIONALE

Un'equazione non può essere corretta se non è *dimensionalmente consistente*. Ciò significa che entrambi i membri dell'equazione devono essere espressi mediante le stesse dimensioni.

Esempio 2.24. Se un soggetto di massa *m* viene sollevato ad un'altezza *h* al di sopra di una superficie orizzontale e quindi lasciato cadere, la velocità all'impatto con la superficie orizzontale può essere calcolata mediante la $v = \sqrt{2gh}$, dove *g* è l'accelerazione di gravità. Verificare se questa equazione è o non è dimensionalmente consistente.

Poiché la velocità ha le dimensioni $[L/T]$ (v. la tab. 2-2), il secondo membro dell'equazione deve avere anch'esso le dimensioni $[L/T]$. Sappiamo (tab. 2-2) che l'accelerazione di gravità ha le dimensioni $[L/T^2]$ e che l'altezza ha le dimensioni $[L]$. La costante 2 è adimensionale. Quindi $\sqrt{2gh}$ ha le dimensioni

$$\sqrt{[L/T^2] \cdot [L]} = \sqrt{[L^2/T^2]} = [L/T]$$

come richiesto. L'equazione è allora dimensionalmente consistente.

Il fatto che un'equazione sia dimensionalmente consistente non garantisce che essa sia corretta.

Esempio 2.25. Supponiamo che l'equazione dell'esempio 2.24 sia stata scritta non correttamente come $v = \sqrt{gh}$. Questa equazione è dimensionalmente consistente anche se è stato omissso un fattore 2.

Se un'equazione non è dimensionalmente consistente, allora l'equazione deve essere non corretta. Così una verifica di consistenza dimensionale può essere molto utile nel controllare se esistono degli errori.

Esempio 2.26. Uno studente che sta studiando la meccanica dei fluidi ha scritto l'equazione base dell'idrostatica così

$$\frac{\Delta p}{\rho} = -gh^2$$

dove Δp è la variazione di pressione nel fluido corrispondente ad un aumento h della sua altezza, ρ è la densità del fluido e g l'accelerazione di gravità. Questa equazione è dimensionalmente consistente?

Dalla tab. 2-2 si vede che la pressione ha le dimensioni $[M/LT^2]$, la densità ha le dimensioni $[M/L^3]$ e l'accelerazione di gravità ha le dimensioni $[L/T^2]$. Con ciò l'equazione può essere scritta in termini di dimensioni come segue

$$\frac{[M/LT^2]}{[M/L^3]} = [L/T^2] \cdot [L^2]$$

che può venire semplificata nella forma $[L^2/T^2] = [L^3/T^2]$.

L'equazione non è dimensionalmente consistente, il che significa che non può essere corretta. (La forma corretta dell'equazione è $(\Delta p)/\rho = -gh$.)

Le funzioni logaritmiche, esponenziali e trigonometriche ed i loro argomenti sono adimensionali (v. il par. 1.11).

Esempio 2.27. La corrente in un certo circuito elettrico può essere rappresentata mediante l'equazione

$$y = ae^{-bt}$$

dove y rappresenta la corrente, t il tempo ed a e b sono due costanti positive. Quali sono le dimensioni appropriate di a e di b ?

L'esponente $-bt$ deve essere adimensionale. Poiché t ha le dimensioni di un tempo $[T]$, la costante b deve avere le dimensioni dell'inverso di un tempo $[T^{-1}]$ affinché le dimensioni scompaiano quando si fa il prodotto bt .

Anche la funzione esponenziale e^{-bt} sarà adimensionale, per cui la costante a deve avere le stesse dimensioni di y , cioè $[A]$, che rappresenta una corrente.

Si possono controllare questi risultati esprimendo l'equazione data in forma dimensionale. Così

$$[A] = [A]e^{-(1/T) \cdot [T]} = [A]$$

L'equazione è dimensionalmente consistente, poiché le dimensioni dell'esponente si semplificano fra loro e rimangono le stesse dimensioni, $[A]$, in entrambi i membri dell'equazione.

Il concetto di consistenza dimensionale può facilmente venire applicato ad unità specifiche. Questo consente di verificare un'equazione per quel che riguarda la *consistenza delle unità*. Si deve tener presente che questa è una condizione più restrittiva della consistenza dimensionale, poiché un'equazione dimensionalmente corretta può ancora contenere unità non consistenti.

Esempio 2.28. L'equazione base dell'idrostatica può essere scritta nella forma $\Delta p = -\rho gh$, dove Δp è la variazione di pressione del fluido corrispondente ad un aumento h della sua altezza, ρ è la densità

del fluido e g è l'accelerazione di gravità. Se ρ è espressa in grammi per centimetro cubo, g in centimetri al secondo e h in centimetri, sarà Δp espressa in pascal (newton per metro quadrato)?

Stabiliamo per prima cosa il fatto che l'equazione è dimensionalmente consistente. Se sostituiamo a ciascun termine le sue dimensioni, otteniamo

$$[M/LT^2] = [M/L^3] \cdot [L/T^2] \cdot [L] \quad \text{ovvero} \quad [M/LT^2] = [M/LT^2]$$

(v. la tab. 2-2). Quindi l'equazione è dimensionalmente consistente.

Sostituiamo ora nell'equazione le unità date. Risulta

$$[N/m^2] = [g/cm^3] \cdot [cm/s^2] \cdot [cm] \quad \text{ovvero} \quad [N/m^2] = [g/cm \cdot s^2]$$

Ma un newton è definito come $1 \text{ kg} \cdot m/s^2$ (tab. 2-4). Sostituendo questa definizione nel primo membro dell'equazione e semplificando, si ottiene

$$[kg/m \cdot s^2] = [g/cm \cdot s^2]$$

Queste unità non sono consistenti. Quindi Δp non sarà espressa in pascal.

Se fossero state scelte unità SI consistenti per questo esempio, la densità sarebbe espressa in kg/m^3 , l'accelerazione di gravità in m/s^2 e l'altezza in m. L'unità corrispondente per Δp sarebbe allora il pascal.

Il requisito secondo cui un'equazione deve avere unità consistenti ci permette di determinare le corrette unità per qualche particolare termine in un'equazione.

Esempio 2.29. Il lavoro fatto da un gas ideale nell'espandere dal volume V_1 al volume V_2 è dato dalla equazione

$$W = nRT \ln(V_2/V_1)$$

dove n rappresenta il numero di moli di gas, R è la *costante universale dei gas* e T è la temperatura assoluta del gas (assunta costante). Se la temperatura è espressa in kelvin ed il lavoro deve essere espresso in joule, in quali unità dovrebbe essere espressa la costante universale dei gas?

Se si risolve l'equazione rispetto ad R e si scrivono per ciascuna variabile le unità appropriate (v. le tab. 2-3 e 2-4), si ottiene

$$R = \frac{W}{nT \ln(V_2/V_1)} = \frac{[J]}{[mol] \cdot [K]}$$

(Si ricordi che $\ln(V_2/V_1)$ è una quantità adimensionale). Quindi le unità desiderate per la costante universale dei gas sono $J/mol \cdot K$. Il valore appropriato di R in queste unità è $R = 8.314 J/mol \cdot K$.

Se un'equazione contiene una somma (o una differenza) fra due o più termini, ciascun termine deve essere espresso nelle stesse unità.

Esempio 2.30. La caduta di pressione per un fluido che attraversa un tubo può venire espressa come

$$\frac{\Delta p}{L} = av + bv^2$$

dove Δp = variazione di pressione, espressa in newton per metro quadrato

L = lunghezza del tubo sulla quale si verifica la caduta di pressione, espressa in metri

v = velocità del fluido, in metri al secondo

In quali unità dovrebbero essere espresse le costanti a e b ?

Il primo membro dell'equazione ha le unità $[N/m^2] \div [m] = [N/m^3]$. Perciò ciascun termine del secondo membro dell'equazione deve avere ancora le unità $[N/m^3]$. Poiché la velocità ha le unità $[m/s]$, si può scrivere

$$[av] = [a] \cdot [m/s] = [N/m^3]$$

Le unità di a devono dunque essere

$$[a] = [N/m^3] \div [m/s] = [N \cdot s/m^4]$$

Similmente

$$[bv^2] = [b] \cdot [m^2/s^2] = [N/m^3] \quad \text{ovvero} \quad [b] = [N \cdot s^2/m^5]$$

PROBLEMI RISOLTI

- 2.1. Un sistema di unità è basato sulle seguenti dimensioni fondamentali: $[L]$, $[M]$, $[T]$, $[Q]$, $[\theta]$, $[I]$. Quale sarà l'appropriata rappresentazione in simboli per (a) la quantità di moto, (b) la pressione, (c) l'energia, (d) la potenza, (e) la densità, (f) la viscosità, (g) la conducibilità termica, (h) il potenziale elettrico, (i) la resistenza elettrica, (j) la capacità elettrica?

I simboli appropriati si possono trovare nella tab. 2-2.

$$\begin{array}{llllll} (a) [ML/T] & (c) [ML^2/T^2] & (e) [M/L^3] & (g) [ML/T^3\theta] & (i) [ML^2/Q^2T] \\ (b) [M/LT^2] & (d) [ML^2/T^3] & (f) [M/LT] & (h) [ML^2/QT^2] & (j) [Q^2T^2/ML^2] \end{array}$$

- 2.2. In un sistema di unità *assoluto*, la forza è una dimensione derivata che viene definita in termini di massa e di accelerazione. Qual è la corretta unità di forza nel sistema metrico assoluto cgs (centimetro - grammo - secondo)?

Dalla seconda legge di Newton, $F = ma$,

$$[F] = [M] \cdot [L/T^2] = [g] \cdot [cm/s^2]$$

per cui l'unità di forza nel sistema cgs è il $g \cdot cm/s^2$, che è chiamata *dine*.

- 2.3. In un sistema di unità *gravitazionale*, la massa è una dimensione derivata che viene definita in termini di forza e di accelerazione. Qual è la corretta unità di massa nel sistema inglese gravitazionale fps?

Dalla seconda legge di Newton, $F = ma$, ovvero $m = F/a$, per cui

$$[M] = \frac{[F]}{[L/T^2]} = \frac{[lb_f]}{[ft/sec^2]}$$

Quindi l'unità di massa è la $lb_f \cdot sec^2/ft$ che è chiamata *slug*.

- 2.4. Per accelerare un certo corpo a 20 m/s^2 , si richiede una forza di 4N. Qual è la massa del corpo, espressa in grammi?

$$m = \frac{F}{a} = \frac{4 \text{ N}}{20 \text{ m/s}^2} = 0.2 \text{ kg} = 200 \text{ g}$$

- 2.5. Quale sarà il peso di una persona di 75 kg su un satellite spaziale dove l'accelerazione di gravità (simulata mediante rotazione) è l'80 per cento del valore sulla terra? Esprimere la risposta in unità SI.

L'accelerazione di gravità sulla terra (a livello del mare e ad una latitudine di 45°) è 9.807 m/s^2 . Quindi l'accelerazione di gravità sul satellite spaziale sarà $(0.8)(9.807) = 7.8456 \text{ m/s}^2$. Il peso della persona sarà allora

$$(75 \text{ kg})(7.8456 \text{ m/s}^2) = 588.42 \text{ N}$$

- 2.6. Un cubo metallico di 2 m di spigolo, la cui massa è 5000 kg, giace su una superficie piana. Determinare la pressione esercitata sulla superficie, in unità SI.

Il peso del cubo sarà

$$(5000 \text{ kg})(9.807 \text{ m/s}^2) = 4.9035 \times 10^4 \text{ N}$$

L'area di una faccia del cubo è 4 m^2 . Quindi la pressione esercitata dal cubo è

$$\frac{4.9035 \times 10^4 \text{ N}}{4 \text{ m}^2} = 1.226 \times 10^4 \text{ Pa}$$

- 2.7. Quanto lavoro viene fatto se una forza di 25 N agisce per una distanza di 6 dm?

Il lavoro è definito come: forza $\times$ distanza. Poiché $6 \text{ dm} = 0.6 \text{ m}$, si può scrivere

$$(25 \text{ N})(0.6 \text{ m}) = 15 \text{ J}$$

- 2.8. Qual è la potenza di uscita corrispondente ad un consumo di energia di 10^3 kcal/h ?

Poiché $10^3 \text{ kcal} = 4184 \times 10^3 \text{ J}$ ed $1 \text{ hr} = 3600 \text{ s}$, la potenza di uscita sarà

$$4184 \times 10^3 \text{ J} / 3600 \text{ s} = 1.162 \times 10^3 \text{ W} = 1.162 \text{ kW}$$

- 2.9. Qual è la potenza di uscita corrispondente ad una corrente di 115 A e ad una tensione di 2000 V?

La potenza può essere definita come: corrente $\times$ tensione. Quindi

$$(115 \text{ A})(2000 \text{ V}) = 230 \times 10^3 \text{ W} = 230 \text{ kW}$$

- 2.10. Una corrente di 30 mA attraversa una resistenza di 10Ω . Quale sarà la corrispondente caduta di tensione?

La tensione può essere espressa come il prodotto della corrente per la resistenza. Quindi

$$(30 \times 10^{-3} \text{ A})(10 \Omega) = 0.30 \text{ V}$$

- 2.11. Quale sarà il peso, in poundal ed in lb_f , di un uomo di 160 lb_m ?

Nelle condizioni standard della gravità terrestre, una massa di 1 lb_m pesa 32.174 poundal ovvero 1 lb_f . Quindi, 160 lb_m pesano

$$160(32.174) = 5147.8 \text{ poundals} \quad \text{ovvero} \quad 160(1) = 160 \text{ lb}_f$$

In alternativa, utilizzando la seconda legge di Newton,

$$F = \frac{ma}{g_c} = \frac{(160 \text{ lb}_m)(32.174 \text{ ft/sec}^2)}{32.174 \text{ lb}_m \cdot \text{ft/lb}_f \cdot \text{sec}^2} = 160 \text{ lb}_f$$

- 2.12. Qual è la massa di un oggetto che peserebbe 1 lb_f su Giove, dove l'accelerazione di gravità è 2.65 volte quella terrestre?

Dalla seconda legge di Newton,

$$m = \frac{g_c F}{a} = \frac{(32.174 \text{ lb}_m \cdot \text{ft/lb}_f \cdot \text{sec}^2)(1 \text{ lb}_f)}{(2.65)(32.174 \text{ ft/sec}^2)} = 0.377 \text{ lb}_m$$

- 2.13. Quante tonnellate di carbone sono contenute in 1 acro di uno strato di carbone dello spessore di 6 ft, se la densità del carbone è di $90 \text{ lb}_m/\text{ft}^3$?

Dalla tab. 2-8, 1 acro = 43.560 ft^2 . Quindi la massa di carbone è

$$(43.560 \text{ ft}^2)(6 \text{ ft})(90 \text{ lb}_m/\text{ft}^3) = 23.522.400 \text{ lb}_m$$

che, convertita in tonnellate, risulta pari a

$$(23.522.400 \text{ lb}_m) \left(\frac{1 \text{ ton}}{2000 \text{ lb}_m} \right) = 11.761.2 \text{ tons}$$

- 2.14. Una forza di 200 libbre-forza agisce su un piatto d'acciaio le cui dimensioni sono di 5 yd x 10 in. Determinare la pressione esercitata, in atmosfere.

L'area del piatto è

$$[(5 \text{ yd})(3 \text{ ft/yd})] \left[(10 \text{ in}) \left(\frac{1 \text{ ft}}{12 \text{ in}} \right) \right] = 12.5 \text{ ft}^2$$

per cui la pressione esercitata sarà

$$(200 \text{ lb}_f) \div (12.5 \text{ ft}^2) = 16 \text{ lb}_f/\text{ft}^2$$

che, convertita in atmosfere, risulta

$$(16 \text{ lb}_f/\text{ft}^2) \left(\frac{1 \text{ atm}}{2116.224 \text{ lb}_f/\text{ft}^2} \right) = 7.56064 \times 10^{-3} \text{ atm}$$

- 2.15. Quante Btu al secondo equivalgono ad 1 horsepower?

Dalla tab. 2-8, 1 hp = 550 ft · lb_f/sec, e 1 Btu = 777.65 ft · lb_f. L'ultima equivalenza di unità si può anche scrivere come 1 Btu/sec = 777.65 ft · lb_f/sec. Quindi,

$$(1 \text{ hp}) \left(\frac{550 \text{ ft} \cdot \text{lb}_f/\text{sec}}{1 \text{ hp}} \right) \left(\frac{1 \text{ Btu/sec}}{777.65 \text{ ft} \cdot \text{lb}_f/\text{sec}} \right) = 0.707259 \text{ Btu/sec}$$

Si vede così che 1 hp equivale approssimativamente a 0.7 Btu/sec.

Si noti il modo con cui le unità si cancellano l'una con l'altra in questo calcolo, lasciando comparire soltanto le unità desiderate, Btu/sec.

- 2.16. Convertire 25 kg/cm² in lb_m/in².

Dall'appendice A,

$$(25 \text{ kg/cm}^2) \left(\frac{2.54 \text{ cm}}{1 \text{ in}} \right)^2 \left(\frac{2.20462 \text{ lb}_m}{1 \text{ kg}} \right) = (25 \text{ kg/cm}^2) \left(\frac{6.4516 \text{ cm}^2}{1 \text{ in}^2} \right) \left(\frac{2.20462 \text{ lb}_m}{1 \text{ kg}} \right) \\ = 355.583 \text{ lb}_m/\text{in}^2$$

- 2.17. Convertire 200 hp in J/h.

Si noti che 1 J/s = 1 W (per definizione). Quindi, dall'appendice A,

$$(200 \text{ hp}) \left(\frac{745.7 \text{ J/s}}{1 \text{ hp}} \right) \left(\frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} \right) = 5.36904 \times 10^8 \text{ J/h}$$

- 2.18. Convertire una lettura di temperatura di 650 °R in una temperatura equivalente in °C.

Dall'appendice A,

$$\theta_F = 1.8\theta_C + 32 = \theta_R - 459.67$$

per cui

$$\theta_C = \frac{\theta_R - 491.67}{1.8} = \frac{650 - 491.67}{1.8} = 87.96 \text{ °C}$$

- 2.19. Convertire una differenza di temperatura di 25 °C in una equivalente differenza di temperatura in gradi Fahrenheit.

Dall'appendice A, 1.8 °F = 1 °C. Quindi,

$$(25 \text{ °C}) \left(\frac{1.8 \text{ °F}}{1 \text{ °C}} \right) = 45 \text{ °F}$$

Confrontando questo problema col problema 2.18, si vede che la conversione di una *differenza di temperatura* si calcola in maniera diversa dalla conversione di una *lettura di temperatura*. Nel primo caso si usa un'equivalenza di unità, mentre nel secondo caso si usa una formula di conversione delle temperature.

- 2.20. Convertire 20 centipoise (una viscosità) in lb_m/ft · hr.

$$(20 \text{ centipoise}) \left(\frac{2.4191 \text{ lb}_m/\text{ft} \cdot \text{hr}}{1 \text{ centipoise}} \right) = 48.382 \text{ lb}_m/\text{ft} \cdot \text{hr}$$

- 2.21. Lo sforzo di taglio in una trave può essere determinato mediante la formula

$$\tau = \frac{VQ}{bI}$$

dove τ è lo sforzo di taglio (forza per unità di superficie), V è la forza esterna, Q è un fattore geometrico avente le dimensioni di un volume, b è lo spessore della trave, ed I è il *momento d'inerzia* (dell'area della sezione trasversale della trave). Quali sono le corrette dimensioni del momento d'inerzia?

Risolvendo rispetto ad I , si ottiene $I = VQ/b\tau$ e quindi

$$[I] = \frac{[V] \cdot [Q]}{[b] \cdot [\tau]} = \frac{[F] \cdot [L^3]}{[L] \cdot [F/L^2]} = [L^4]$$

- 2.22. Il moto di una massa vibrante può essere determinato mediante l'equazione

$$x = e^{-\alpha t} (C_1 \sin \beta t + C_2 \cos \beta t)$$

dove x è la distanza dalla posizione di equilibrio all'istante t . Determinare le unità di α , β , C_1 , C_2 se x è espressa in metri e t in secondi.

Gli argomenti delle funzioni esponenziale e trigonometriche devono essere adimensionali. Perciò α e β devono essere espressi in termini di s⁻¹. Ma anche le stesse funzioni esponenziali e trigonometriche sono adimensionali, per cui C_1 e C_2 devono essere espresse in metri.

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

Le risposte sono fornite alla fine del libro.

- 2.23. Esprimere le dimensioni fondamentali dell'SI mediante la notazione in simboli.
- 2.24. Esprimere le dimensioni fondamentali del sistema degli ingegneri americano mediante la notazione in simboli.
- 2.25. Un sistema di unità è basato sulle dimensioni fondamentali $[L]$, $[T]$, $[F]$, $[A]$, $[\theta]$, $[I]$. Quale sarà l'approssimata rappresentazione in simboli per ciascuna delle seguenti dimensioni derivate: (a) la quantità di moto, (b) lo sforzo, (c) l'energia, (d) la potenza, (e) la densità, (f) la viscosità, (g) la conducibilità termica, (h) il potenziale elettrico, (i) la resistenza elettrica, (j) la induttanza elettrica?
- 2.26. In un sistema di unità *assoluto*, la forza è una dimensione derivata definita in termini di massa e di accelerazione. Qual è la corretta unità di forza nel sistema inglese assoluto fps?
- 2.27. In un sistema di unità *gravitazionale*, la massa è una dimensione derivata definita in termini di forza e di accelerazione. Qual è la corretta unità di massa nel sistema metrico gravitazionale mks, dove l'unità di forza è il kg_f?

- 2.28 Definire le seguenti unità SI: (a) newton, (b) joule, (c) watt, (d) hertz, (e) pascal, (f) coulomb, (g) volt, (h) ohm, (i) farad, (j) henry, (k) weber, (l) tesla, (m) lumen, (n) lux.
- 2.29 Definire i seguenti prefissi dell'SI: (a) centi, (b) deci, (c) kilo, (d) mega, (e) micro, (f) milli, (g) nano, (h) pico.
- 2.30 Determinare la forza richiesta affinché una massa di 30 g sia accelerata a 180 cm/s^2 .
- 2.31 Una massa di 12 kg pesa 54 N sulla superficie di un lontano pianeta. Qual è l'accelerazione di gravità su quel pianeta?
- 2.32 Un oggetto giacente su una superficie piana esercita una pressione di 10 kPa sulla superficie. Se la superficie ha un'area di 4 cm^2 , qual è la massa dell'oggetto considerato?
- 2.33 Quanto lavoro è richiesto per sollevare di 80 cm una massa di 50 kg?
- 2.34 Quante kcal/s sono necessarie per alimentare una lampada ad incandescenza da 100 W?
- 2.35 Qual è la potenza di uscita corrispondente ad un consumo di energia di 10^7 N.m/h ?
- 2.36 Se a 3.5 kg d'acqua vengono forniti 50 kJ sotto forma di calore, quale sarà l'incremento di temperatura risultante?
- 2.37 Un dispositivo elettronico ha una potenza nominale di 0.5W. Se il dispositivo consuma 20 mA, qual è la corrispondente caduta di tensione?
- 2.38 Se il dispositivo del problema 2.37 è un resistore, qual è la sua resistenza?
- 2.39 Quale carica si richiede per produrre una corrente di 20 A per un minuto?
- 2.40 Qual è la capacità corrispondente ad una carica di 8 C che agisce su una differenza di potenziale di 20 V?
- 2.41 Quanti μs vi sono in 1 min?
- 2.42 Quanti mg vi sono in 1 kg?
- 2.43 A quanti ps equivale 1 ms?
- 2.44 Un moderno computer può sommare due numeri in circa 100 ns. Quante addizioni possono essere effettuate nel tempo richiesto per un battito di ciglio (circa 0.1 s)?
- 2.45 Un uomo pesa 175 libbre (sulla terra, al livello del mare e ad una latitudine di 45°). (a) Qual è il suo peso in poundal? (b) Qual è la sua massa? (c) Quanto peserà, in lb_f e in poundal, su un lontano pianeta dove l'accelerazione di gravità è il doppio di quella terrestre? (d) Quale sarà la sua massa su quel lontano pianeta?
- 2.46 Quale sarà l'accelerazione risultante se una forza di 150 lb_f viene applicata ad una massa di 40 lb_m ?

- 2.47 Quanto lavoro è necessario per accelerare una massa di 0.2 tonnellate a 4 ft/sec^2 su una distanza di 6 ft?
- 2.48 Quant'acqua è contenuta in un recipiente da 50 galloni? (La densità dell'acqua è $62.4 \text{ lb}_m/\text{ft}^3$).
- 2.49 Quale forza è necessaria per produrre una pressione di 75 atm, se la forza agisce su un piatto d'acciaio delle dimensioni $2 \text{ ft} \times 4 \text{ in}$?
- 2.50 Quanti ft.lbf/sec equivalgono a 150 hp?
- 2.51 Quanti hp equivalgono a 375 Btu/sec?
- 2.52 Se si somministrano 128 Btu ad 8.3 lb_m d'acqua inizialmente a 58.7°F , quale sarà la temperatura finale dell'acqua?
- 2.53 Effettuare le seguenti conversioni di unità: (a) 156 kg in lb_m , (b) 47.2 lb_m in g, (c) 0.0173 ton in kg, (d) 625 ft in m, (e) 39.2 cm in in, (f) 0.001 in in $\text{\AA}$, (g) 200 mi in km, (h) $72 \mu\text{m}$ in ft, (i) 0.033 min in μs , (j) 12 ns in ps, (k) 58.1 ms in h, (l) 800 N in lb_f , (m) 53.9 poundals in dynes, (n) 0.887 lb_f in N, (o) 208 Btu in kcal, (p) 208 Btu in J, (q) 125 000 J in $\text{hp}\cdot\text{hr}$, (r) 125 000 J in $\text{kW}\cdot\text{h}$, (s) $5 \times 10^6 \text{ kcal}$ in $\text{kW}\cdot\text{hr}$, (t) 700 hp in kW , (u) 425 W in hp, (v) 2000 kcal/s in MW, (w) 17 L in gal, (x) 0.667 ft^3 in L, (y) 5 acre-ft in m^3 , (z) 8 atm in Pa.
- 2.54 Un grado Rankine è maggiore o minore di un grado Kelvin?
- 2.55 Vengono date qui di seguito alcune letture di temperatura (misure di temperatura). Effettuare le conversioni indicate.
- | | |
|--|---|
| (a) 165°F in $^\circ\text{R}$, $^\circ\text{C}$ e K | (c) 1200 $^\circ\text{R}$ in K, $^\circ\text{F}$ e $^\circ\text{C}$ |
| (b) 25°C in K, $^\circ\text{F}$ e $^\circ\text{R}$ | (d) 220 K in $^\circ\text{C}$, $^\circ\text{R}$ e $^\circ\text{F}$ |
- 2.56 Vengono date alcune differenze di temperatura. Effettuare le conversioni indicate.
- | | |
|---|---|
| (a) 120°C in K e $^\circ\text{R}$ | (c) 1000 K in $^\circ\text{F}$ e $^\circ\text{C}$ |
| (b) 45°F in $^\circ\text{C}$ e K | (d) 270 $^\circ\text{R}$ in $^\circ\text{F}$ e K |
- 2.57 Effettuare le seguenti conversioni di unità.
- | | |
|--|--|
| (a) $105 \text{ lb}_m/\text{ft}^3$ in g/cm^3 | (g) $750 \text{ Btu/hr}\cdot\text{ft}^2$ in $\text{kcal/s}\cdot\text{cm}^2$ |
| (b) 0.915 g/cm^3 in lb_m/ft^3 | (h) 30 $\text{lb}_f\cdot\text{in}$ in N/cm |
| (c) $4.4 \times 10^5 \text{ Btu/hr}$ in kcal/s | (i) $4.08 \text{ lb}_m/\text{min}\cdot\text{ft}^2$ in $\text{kg/s}\cdot\text{m}^2$ |
| (d) $4.4 \times 10^5 \text{ Btu/hr}$ in J/min | (j) 12 500 gal $\cdot\text{hr}$ in L/min |
| (e) 810 kcal/min in $\text{ft}\cdot\text{lb}_f/\text{sec}$ | (k) 15 $\text{Btu/hr}\cdot\text{ft}^2\cdot^\circ\text{F}$ in $\text{W/m}^2\cdot\text{K}$ |
| (f) 3500 kcal/m^2 in Btu/ft^2 | (l) $6.67 \text{ ft}^2/\text{hr}$ in stokeses (viscosità cinematica) |
- 2.58 Un filo di rame ha un diametro di 2 mm. Sapendo che la densità del rame è 8300 kg/m^3 , quale sarà il peso di 100 m di filo?
- 2.59 Una trave ad I in acciaio pesa 225 lb_f per piede di lunghezza. Qual è l'area della sezione trasversale della trave ad I, in pollici quadrati, se la densità dell'acciaio è $440 \text{ lb}_m/\text{ft}^3$?
- 2.60 Un fiume scarica 160 000 gal/sec d'acqua alla sua foce. Se la sezione trasversale del letto del fiume ha la forma di un semicerchio con un diametro di $1/8$ di miglio, quale sarà la velocità di efflusso dell'acqua? Esprimere la risposta in ft/sec ed in km/h .

2.61. Determinare se sono o non sono dimensionalmente consistenti le seguenti equazioni.

(a)
$$h = \sqrt{\frac{\mu x}{\rho v}}$$

dove h = altezza dello strato di fluido
 μ = viscosità del fluido
 x = distanza
 ρ = densità del fluido
 v = velocità del fluido

(b)
$$v = \sqrt{2cgT[1-(p_2/p_1)^{(k-1)/k}]}$$

dove v = velocità del gas
 c = capacità termica
 g = accelerazione di gravità
 T = temperatura assoluta

(c)
$$I = V \left[R^2 + \left(2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

dove I = corrente elettrica
 V = tensione (potenziale elettrico)
 R = resistenza
 f = frequenza
 L = induttanza
 C = capacità

2.62. Nella meccanica dei fluidi, la forza d'attrito di un fluido che agisce su una superficie liscia è data dalla formula

$$F = \frac{1}{2} c_p a v^2$$

dove F = forza d'attrito
 c = coefficiente d'attrito
 ρ = densità del fluido
 a = area della superficie
 v = velocità del fluido

Determinare le dimensioni di c , il coefficiente di attrito.

2.63. Il volume di una sostanza alla temperatura T può venire calcolato dalla formula

$$V = V_0(1 + \beta T)$$

dove V = volume alla temperatura T
 V_0 = volume alla temperatura zero
 β = coefficiente di dilatazione volumetrica

(a) Determinare le dimensioni di β . (b) Determinare le corrette unità di β se V è espresso in litri e T in kelvin.

2.64. La temperatura, la pressione ed il volume di un gas sono legati dalla formula

$$p = \frac{RT}{V-a} - \frac{b}{V^2}$$

dove p = pressione del gas
 R = costante universale dei gas
 T = temperatura assoluta del gas
 V = volume del gas, per mole
 a, b = costanti correttive

(a) Determinare le dimensioni di R, a e b . (b) Determinare le corrette unità SI per R, a e b .
 (c) Determinare le corrette unità inglesi per R, a e b (assumere che p sia espressa in atmosfere).

2.65. Il carico capace di provocare lo svergolamento (il collasso) di una colonna è dato dalla formula

$$F = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

dove F = forza (carico) che provoca l'imbozzamento
 E = modulo di Young
 I = momento d'inerzia della sezione trasversale
 L = lunghezza della colonna

(a) Determinare le dimensioni di E sapendo che I ha le dimensioni $[L^4]$. (b) Se I è espresso in m^4 , quali sono le corrette unità per E ? (c) Se I viene espresso in in^4 , determinare le corrette unità per L e per E .

2.66. La velocità a cui il calore viene trasferito attraverso una superficie è determinata dalla formula

$$Q = UA \Delta T$$

dove Q = velocità di trasferimento del calore
 U = coefficiente di trasporto del calore
 A = area della superficie
 ΔT = differenza di temperatura attraverso la superficie

(a) Se la velocità di trasferimento del calore viene espressa come energia per unità di tempo, quali sono le dimensioni che deve avere U ? (b) Quali sono le corrette unità SI per U ? (c) Quali sono le corrette unità per U se Q è espresso in Btu/hr ed A è espresso in ft^2 ?

CAPITOLO 3

Grafici e nomogrammi

Un *grafico* consente la rappresentazione di un'equazione o di un gruppo di dati su una rete bidimensionale, mentre un *nomogramma* viene usato per rappresentare un'equazione per mezzo di diverse scale opportunamente disposte. Questi strumenti grafici mettono in evidenza relazioni che potrebbero altrimenti risultare nascoste in complicate equazioni algebriche o in lunghe tabelle di numeri.

3.1 COORDINATE CARTESIANE

Il tipo di grafico più comune è basato sull'impiego di *coordinate cartesiane* (dette anche *coordinate aritmetiche* o *coordinate ortogonali*). Quando i dati vengono rappresentati in questa maniera, la variabile dipendente è messa in grafico lungo l'asse verticale (l'*ordinata*) e la variabile indipendente è riportata lungo l'asse orizzontale (l'*ascissa*). Ciascun asse dovrebbe essere chiaramente contrassegnato, indicando la scala, la variabile che su di esso viene riportata e le sue unità.

Esempio 3.1. La posizione di un oggetto che cade può essere determinata come una funzione del tempo mediante l'equazione

$$y = 200 - 4.9t^2$$

dove y = altezza dell'oggetto al di sopra del suolo, in metri
 t = tempo contato a partire dal momento in cui l'oggetto viene abbandonato, in secondi
Preparare un diagramma di y in funzione di t .
È più facile incominciare a tabulare i valori corrispondenti di y e di t , come è mostrato qui sotto. Questi valori possono successivamente venire messi in grafico.

t, s	0	1	2	3	4	5	6	6.39
y, m	200	195.1	180.4	155.9	121.6	77.5	23.6	0.0

L'ultimo valore è stato ottenuto risolvendo l'equazione data rispetto al valore di t corrispondente ad $y = 0$.
I dati precedenti sono stati riportati in grafico in fig. 3-1 e si è tracciata una curva continua e regolare attraverso i singoli punti-dato.

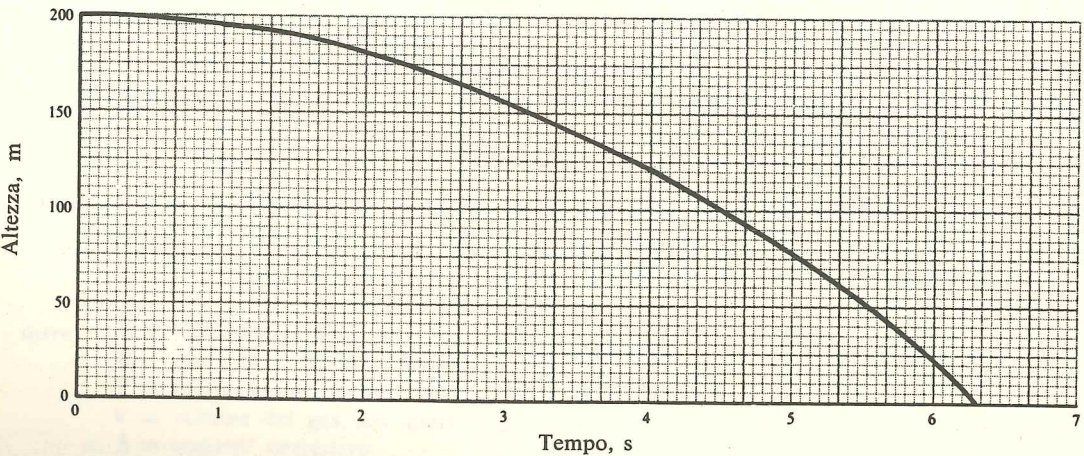


Fig. 3-1

Se i dati rappresentano quantità misurate anziché calcolate, può risultare opportuno mostrare sul grafico i punti-dato effettivi. Ciò può essere facilmente ottenuto racchiudendo ciascun punto-dato entro un circoletto, un triangolo, un quadratino, ecc. Una curva continua e regolare può quindi venire tracciata attraverso l'insieme dei dati; non è necessario, tuttavia, che questa curva passi per ogni punto-dato.

Esempio 3.2. Uno studente ha condotto un'esperienza per studiare la reazione chimica $A + B \rightarrow C$. Le misure da lui ottenute per $[C]$, concentrazione di C in moli per litro, ai vari istanti sono le seguenti:

t, s	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5
$[C], \text{mol/L}$	0	0.05	0.24	0.40	0.60	0.95	1.24	1.41
t	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	
$[C]$	1.64	1.80	1.89	1.96	2.03	2.04	2.05	

In base a questi dati, costruire una curva continua che mostri la variazione di $[C]$ col tempo.
I dati sono riportati in grafico nella fig. 3-2. Si noti che ciascun punto-dato è circondato da un circoletto. Una curva continua, che mostra la variazione approssimata della concentrazione col tempo, è stata tracciata attraverso i punti-dato. Allo scopo di arrotondare i dati, tuttavia, la curva non passa necessariamente per ciascun punto-dato. La curva tenta, piuttosto, di rappresentare l'andamento generale indicato dai dati.

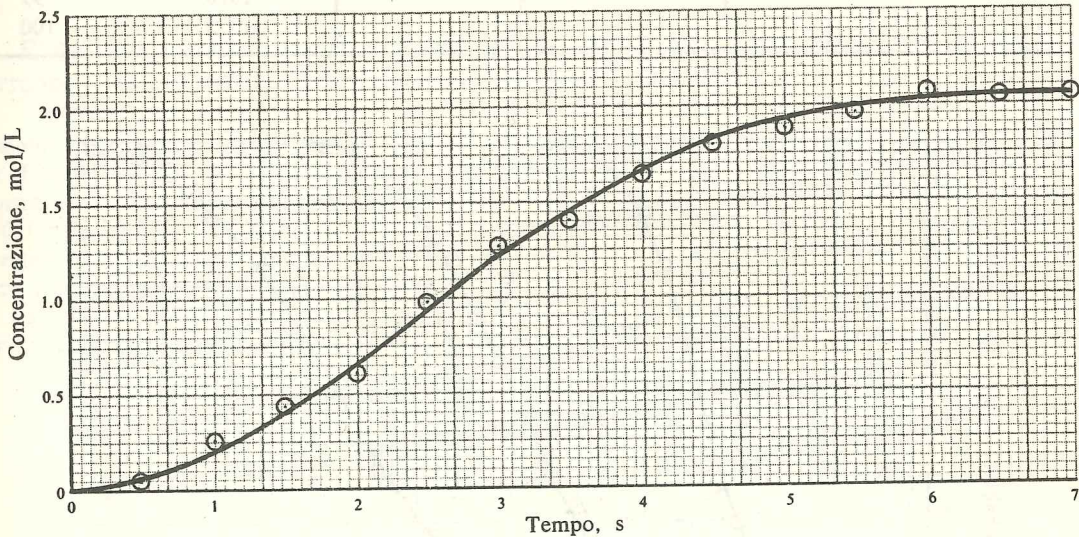


Fig. 3-2

Talvolta diversi gruppi di dati sono riportati sullo stesso grafico. In questi casi è importante che ciascun gruppo di dati venga chiaramente identificato e distinto da tutti gli altri.

Esempio 3.3. Diverse prove sono state condotte su un componente di una struttura la cui probabilità cumulativa di collasso aumenta sensibilmente con l'aumentare della temperatura, una volta superata una certa temperatura critica. I risultati di tre prove sono presentati nella tab. 3-1. Ciascuna prova è stata condotta con un materiale differente, avente una diversa temperatura critica. Per scopi di confronto, è opportuno riportare i risultati di tutte e tre le prove sullo stesso grafico.

I dati sono riportati in grafico nella fig. 3-3. Si noti che ciascuna curva è identificata come prova A, B o C, e che un simbolo differente è usato per ciascun gruppo di dati. Si noti anche che la scala delle temperature (riportata in ascisse) incomincia a 1200 K anziché a 0 K.

Tabella 3-1

Prova A		Prova B		Prova C	
Temperatura, K	Probabilità cumulativa di collasso %	Temperatura, K	Probabilità cumulativa di collasso %	Temperatura, K	Probabilità cumulativa di collasso %
1220	0	1250	0	1280	0
1225	2	1255	1.5	1285	2
1230	4	1260	3	1290	4
1235	12	1265	7	1295	8
1240	20	1270	13	1300	12
1245	35	1275	22	1305	17
1250	55	1280	30	1310	25
1255	75	1285	44	1315	32
1260	85	1290	55	1320	40
1265	94	1295	65	1325	48
1270	98	1300	75	1330	58
1275	99.5	1305	81	1335	67
1280	100	1310	88	1340	74
		1315	94	1345	80
		1320	97	1350	86
		1325	99	1355	91
		1330	100	1360	95
				1365	98
				1370	99
				1375	100

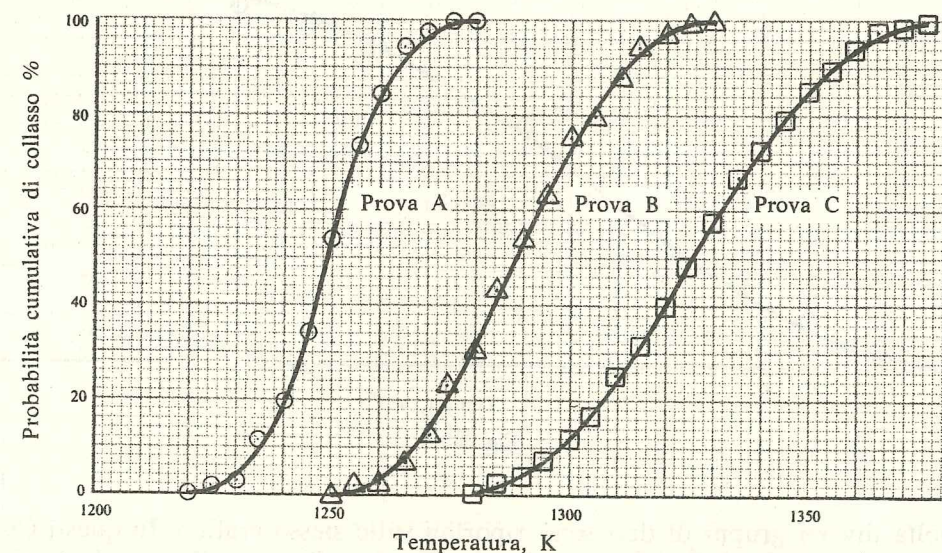


Fig. 3-3

Non è necessario che un grafico sia limitato a gruppi positivi di dati. Sia valori positivi sia valori negativi possono venire riportati lungo ciascuno degli assi, facendo sì che il grafico risulti diviso in quattro *quadranti*. Il quadrante superiore di destra, che contiene soltanto punti-dato positivi, è chiamato *primo quadrante* (quadrante I). Gli altri quadranti sono numerati consecutivamente in senso antiorario a partire dal quadrante I.

Esempio 3.4. Una massa giacente su una superficie orizzontale è tesa fra due molle orizzontali. Se la massa viene spostata nella direzione x positiva (cioè verso destra), allora le molle esercitano una forza nella direzione opposta (verso sinistra), che tende a riportare la massa nella sua posizione iniziale (di riposo). La stessa cosa accade se la massa viene spostata nella direzione delle x negative, provocando una forza di richiamo nella direzione delle x positive.

La fig. 3-4 mostra un diagramma della forza in funzione dello spostamento. Si noti che la curva figura nel secondo (superiore di sinistra) e quarto (inferiore di destra) quadrante. La ragione di ciò, naturalmente, è che uno spostamento positivo produce una forza negativa, mentre uno spostamento negativo dà luogo ad una forza positiva.

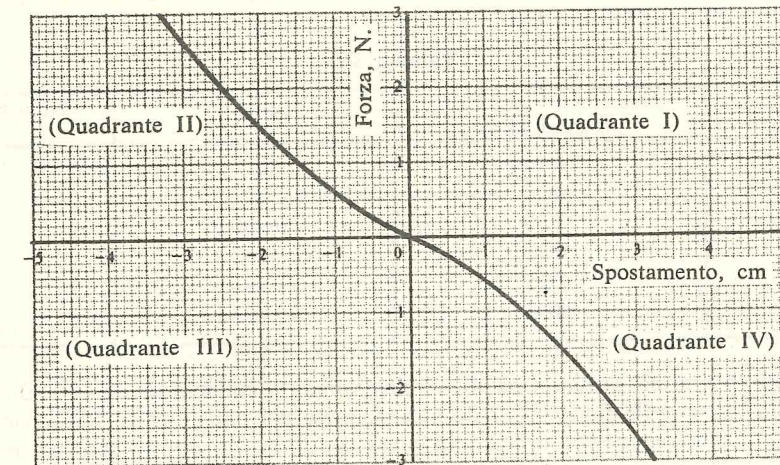


Fig. 3-4

E' molto importante che le divisioni lungo ciascun asse siano chiare e facili da leggersi. Dovrebbero essere evitati fattori di scala complicati od oscuri.

Esempio 3.5. La fig. 3-5 mostra due modi di contrassegnare l'ordinata nel grafico di un certo gruppo di dati sforzo-deformazione. Supponiamo di voler determinare il valore dello sforzo corrispondente ad una deformazione di 0.00175. Il valore dell'ordinata è 350. Con ciò, in base alla prima definizione, lo sforzo $\times 10^{-7}$ vale 350 N/m^2 , per cui lo sforzo effettivo è $350 \times 10^7 \text{ N/m}^2$. Sarebbe molto facile, tuttavia, interpretare erroneamente il fattore di scala lungo l'ordinata e concludere (in maniera sbagliata) che lo sforzo corrispondente ad una deformazione di 0.00175 è $350 \times 10^{-7} \text{ N/m}^2$.

La seconda indicazione è molto migliore. Essa mostra chiaramente che il valore dello sforzo corrispondente ad una deformazione di 0.00175 è $350 \times (10^7 \text{ N/m}^2)$, ovvero $350 \times 10^7 \text{ N/m}^2$.

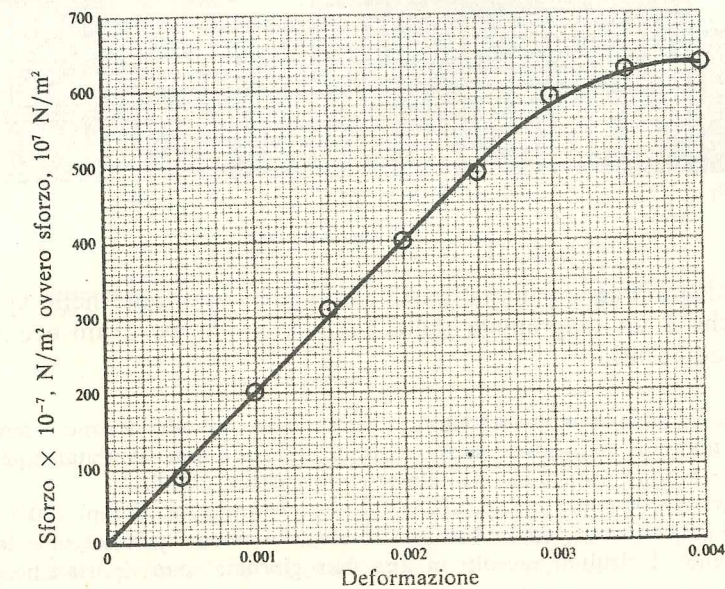


Fig. 3-5

3.2 DIAGRAMMI A COLONNE (ISTOGRAMMI)

Quando i dati vengono effettivamente ottenuti mediante misure, i valori della variabile dipendente possono corrispondere ad *intervalli discreti* della variabile indipendente anziché a punti singoli. In questi casi può essere opportuno riportare i dati in grafico sotto forma di rettangoli verticali adiacenti l'uno all'altro. Questo tipo di rappresentazione è noto come *diagramma a colonne*.

Esempio 3.6. Nella tab. 3-2 è tabulata una produzione di macchine fotografiche reflex a lente semplice, su una base mensile, per il passato anno solare.

Tabella 3-2

Mese	Numero di macchine fotografiche	Mese	Numero di macchine fotografiche
gennaio	8774	luglio	8831
febbraio	9308	agosto	9147
marzo	9760	settembre	9382
aprile	9644	ottobre	9549
maggio	9215	novembre	9130
giugno	9058	dicembre	8983

I dati sono riportati in grafico sotto forma di un diagramma a colonne in fig. 3-6. Questo tipo di grafico è molto opportuno a causa delle fluttuazioni da mese a mese dei dati. Queste fluttuazioni sarebbero meno evidenti se i dati venissero rappresentati con una curva continua. (In questo caso un arrotondamento delle fluttuazioni sarebbe evidentemente inopportuno).

Si noti che l'ordinata in fig. 3-6 incomincia col valore 8000 anziché con lo zero. Questo fa sì che la scala risulti ingrandita, col che risultano ancor più evidenziate le fluttuazioni nei dati.

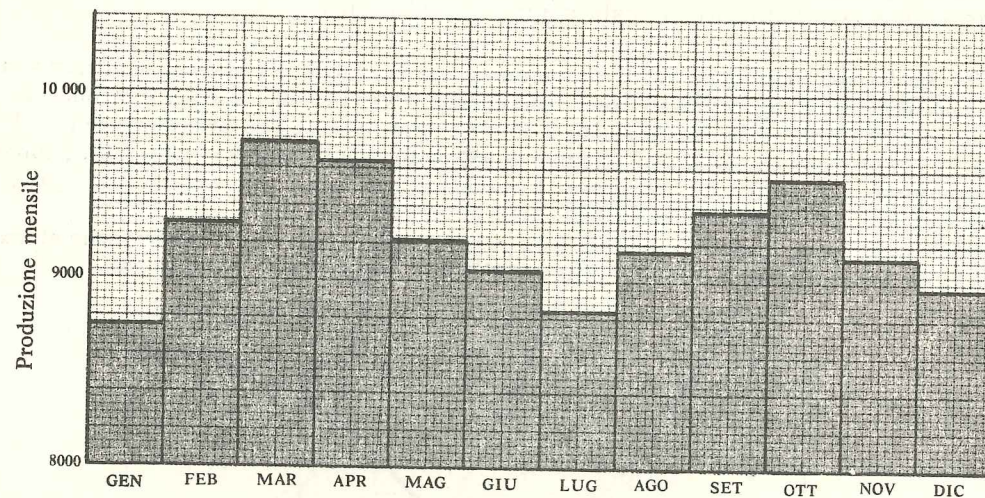


Fig. 3-6

Un tipo di diagramma a colonne particolarmente importante nelle applicazioni statistiche è l'*istogramma*, che è un diagramma della *frequenza relativa* di un evento in ciascuno di diversi intervalli adiacenti.

Esempio 3.7. Nella fabbricazione di un motore d'automobile, i cilindri devono essere lavorati ciascuno ad un diametro di 90 mm. La lavorazione deve essere realizzata il più accuratamente possibile, anche se vi sarà sempre qualche piccola variazione nel diametro di ciascun cilindro.

Allo scopo di stimare il grado di controllo di qualità in un dato giorno, 200 blocchi motore vengono scelti a caso dopo la lavorazione, ed il diametro di uno dei cilindri per ciascuno dei blocchi motore viene misurato accuratamente. I risultati raccolti in una data giornata sono riportati nelle prime due colonne della tab. 3-3.

Tabella 3-3

Intervallo, mm	Numero di campioni	Frequenza relativa, %	Frequenza relativa cumulativa, %
89.1-89.3	2	1.0	1.0
89.3-89.5	5	2.5	3.5
89.5-89.7	11	5.5	9.0
89.7-89.9	29	14.5	23.5
89.9-90.1	107	53.5	77.0
90.1-90.3	27	13.5	90.5
90.3-90.5	9	4.5	95.0
90.5-90.7	7	3.5	98.5
90.7-90.9	3	1.5	100.0
TOTALI	200	100.0%	

Così 2 dei diametri misurati erano fra 89.1 ed 89.3 mm, 5 misure cadevano fra 89.3 ed 89.5 mm, e così via. Si noti che tutte le misure risultavano entro ± 1 mm rispetto al valore desiderato di 90 mm.

La frequenza relativa (terza colonna della tab. 3-3) si può facilmente determinare dividendo il numero dei campioni per ciascun intervallo per il numero totale dei campioni e moltiplicando poi per 100 per convertire il risultato in per cento. Così la frequenza relativa per l'intervallo 89.1-89.3 mm risulta

$$\text{frequenza relativa} = \frac{2}{200} \times 100 = 1\%$$

e così via.

Un istogramma delle frequenze relative è mostrato in fig. 3-7. Si noti che l'ascissa è suddivisa in corrispondenza dei punti di mezzo degli intervalli anziché in corrispondenza degli estremi degli intervalli stessi. Ciò non è necessario, ma è una consuetudine abbastanza diffusa, poiché il punto medio viene di solito assunto come rappresentativo dell'intero intervallo.

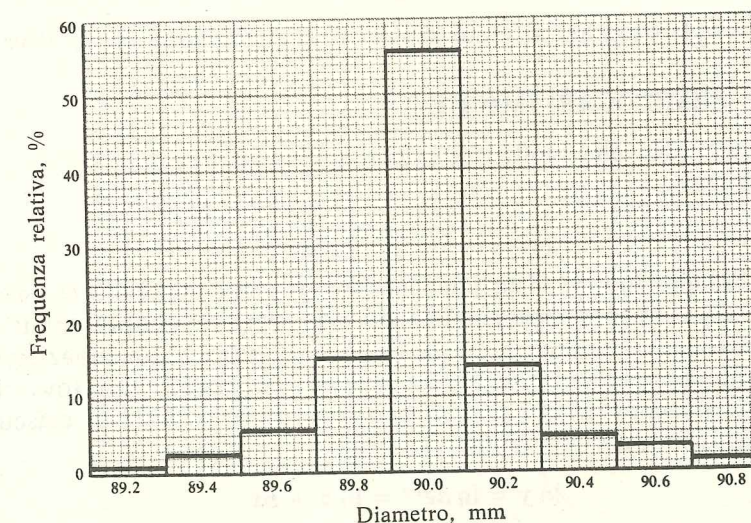


Fig. 3-7

Esempio 3.8. Riportare in grafico le *frequenze relative cumulative* per i dati dell'esempio 3.7. (Si parla, per questa rappresentazione, di *distribuzione relativa cumulativa* o semplicemente di *distribuzione cumulativa*).

Le frequenze relative cumulative sono calcolate nella quarta colonna della tab. 3-3. Ciascun valore cumulativo consiste della somma di tutte le frequenze relative dal primo intervallo all'intervallo considerato. In altre parole, la prima frequenza relativa cumulativa è semplicemente 1.0; la seconda è $1.0 + 2.5 = 3.5$ e così via.

La fig. 3-8 è un diagramma della distribuzione relativa cumulativa. L'ascissa è ora suddivisa in corrispondenza degli estremi degli intervalli anziché in corrispondenza dei punti di mezzo. Ciò è del tutto usuale quando si rappresentano in grafico dati di distribuzione cumulativa.

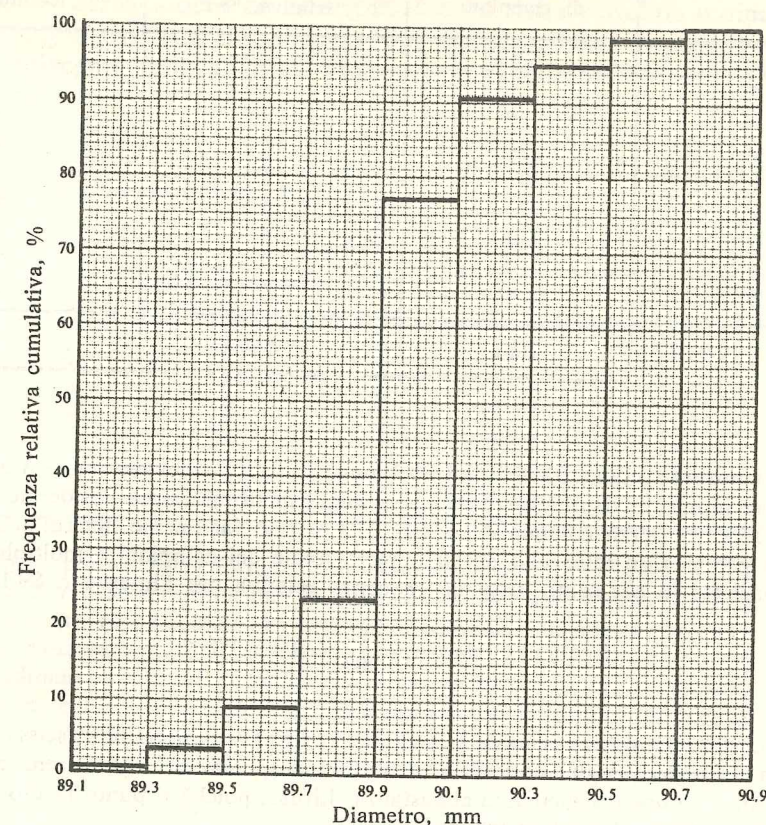


Fig. 3-8

Diremo di più sugli istogrammi e sui grafici di distribuzione cumulativa nel cap. 4.

3.3 COORDINATE SEMILOGARITMICHE

Abbiamo già osservato che molti dei calcoli scientifici e tecnici coinvolgono equazioni esponenziali della forma

$$y = ae^{bx}$$

(v. il par. 1.11). Abbiamo inoltre visto che queste equazioni generano le curve ben note di accrescimento o di decadimento esponenziale quando vengono rappresentate graficamente su carta millimetrata aritmetica ordinaria (v. la fig. 1.1). Tuttavia, un'equazione esponenziale può essere rappresentata come una linea retta ponendo in grafico $\ln y$ (ovvero $\log y$) in funzione di x . Per rendersi conto di ciò, si prenda il logaritmo naturale di ciascuno dei membri dell'equazione sopra scritta, col che si ha

$$\ln y = \ln ae^{bx} = \ln a + bx$$

Con ciò, se $\ln y$ viene riportato in grafico in funzione di x , si otterrà una linea retta avente pendenza b ed intercetta verticale $\ln a$.

Per gli scopi di rappresentazione grafica è più conveniente usare i logaritmi comuni (in base 10) anziché i logaritmi naturali. Poiché $\log x \approx 0.434 \ln x$ (v. la tab. 1-1),

$$\log y = \log a + (0.434b)x$$

Quindi, se si porta in grafico $\log y$ in funzione di x , si otterrà una linea retta di pendenza $0.434b$ e di intercetta verticale $\log a$.

Esempio 3.9. Tracciare un diagramma dell'equazione $y = 10e^{-0.5x}$ in coordinate cartesiane. Costruire il grafico in due maniere differenti: prima riportare y in funzione di x , e poi $\log y$ in funzione di x . Alcuni valori di x , di y e di $\log y$, ottenuti facendo uso di un calcolatore elettronico, sono dati in tab. 3-4.

Tabella 3-4

x	y	$\log y$
0	10	1
1	6.07	0.783
2	3.68	0.566
3	2.23	0.349
4	1.35	0.131
5	0.821	-0.086
6	0.498	-0.303
7	0.302	-0.520
8	0.183	-0.737
9	0.111	-0.954

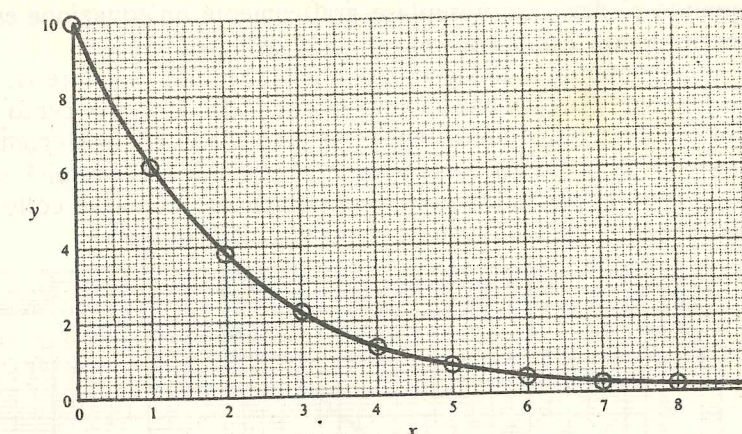


Fig. 3-9

I valori di y sono riportati in grafico nella fig. 3-9. Si osservi la ben nota curva di decadimento esponenziale, che dovremmo aspettarci di ottenere mettendo in grafico un'equazione esponenziale negativa su carta millimetrata aritmetica.

La fig. 3-10 mostra un diagramma di $\log y$ in funzione di x , ottenuto ancora dalla tab. 3-4. Si vede che si ottiene ora una linea retta, la cui intercetta verticale è 1.0 e la cui pendenza è -0.217 . Dalla data equazione, $a = 10$ e quindi $\log a = 1$, che corrisponde al valore dell'intercetta osservata in fig. 3-10. Ancora, abbiamo $b = -0.5$ nell'equazione data. Quindi la pendenza della retta dovrebbe essere

$$(0.434)(-0.5) = -0.217$$

come appunto risulta in fig. 3-10.

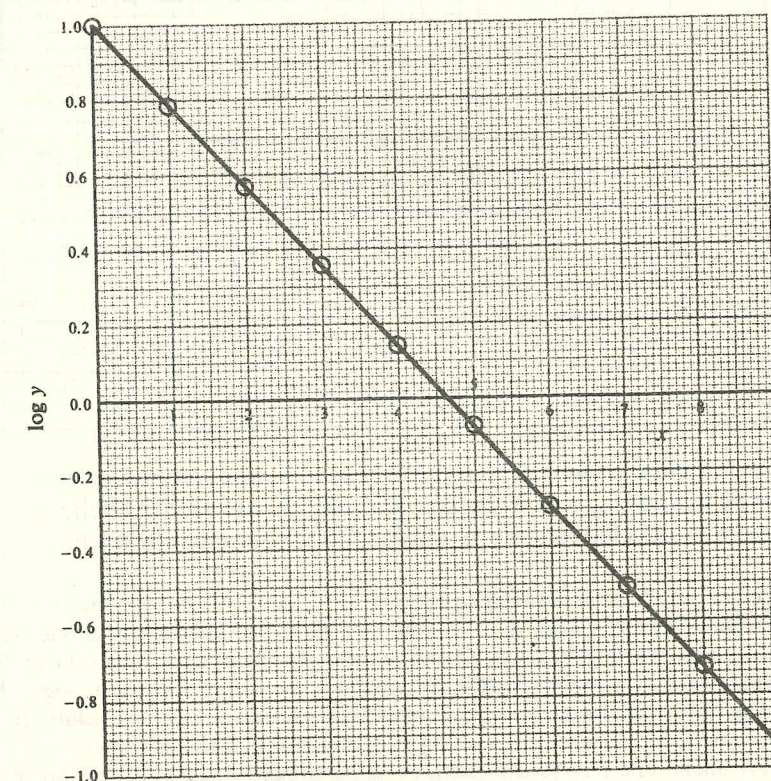


Fig. 3-10

Un modo molto più facile di rappresentare graficamente $\log y$ in funzione di x è quello di usare carta millimetrata *semilogaritmica*, come mostrato in fig. 3-11. In questo tipo di grafico l'ordinata è suddivisa in intervalli proporzionali a $\log y$ anziché ad y , anche se l'ordinata è *contrassegnata* in unità ordinarie di y . Non è così necessario calcolare il logaritmo di y quando si deve rappresentare graficamente un'equazione esponenziale; di ciò si fa carico automaticamente l'impostazione grafica dell'ordinata.

Per esempio, il log di 2 è 0.301; quindi il valore dell'ordinata contrassegnato con 2 in fig. 3-11 è collocato ad una distanza del 30.1 per cento dal fondo. E' proprio $\log 2$ che si colloca in questo punto, anche se esso viene contrassegnato con 2. Si noti che poiché $\log 1 = 0$, il punto contrassegnato con 1 è all'estremità inferiore dell'ordinata. Ancora, $\log 10 = 1$, per cui il punto contrassegnato con 10 è collocato alla distanza del 100 per cento dal fondo (cioè all'estremità superiore dell'ordinata).

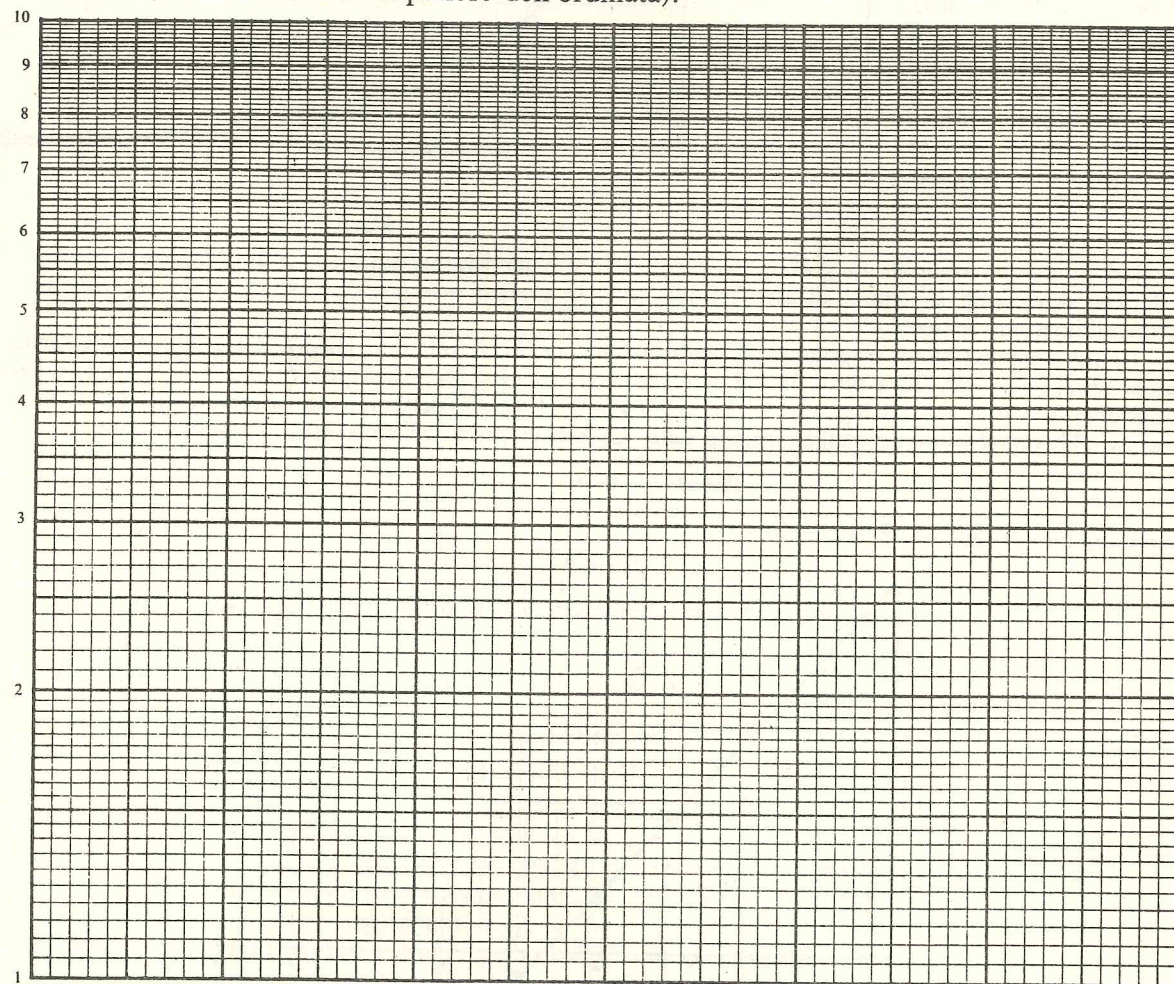


Fig. 3-11

La fig. 3-11 è indicata come carta semilogaritmica *monociclica*, poiché l'ordinata abbraccia un solo ordine di grandezza (cioè un solo fattore di dieci). E' anche disponibile della carta semilogaritmica multi-ciclica, che è quella più comunemente usata.

Esempio 3.10. Tracciare un diagramma dell'equazione $y = 10e^{-0.5x}$ in coordinate semilogaritmiche.

Abbiamo già tabulato diversi valori di y in funzione di x per questa equazione nella tab. 3-4. Questi valori, riportati su carta semilogaritmica, danno luogo alla linea retta mostrata in fig. 3-12.

Ci si deve rendere conto che la fig. 3-12 è effettivamente un diagramma di $\log y$ in funzione di x (si confronti con la fig. 3-10), anche se si sono riportati in grafico i valori tabulati di y (non di $\log y$) in funzione di x . Con ciò la conversione da y a $\log y$ è realizzata automaticamente dalle coordinate semilogaritmiche. Si osservi anche che è stata utilizzata carta semilogaritmica biciclica, poiché i valori di y abbracciano due ordini di grandezza.

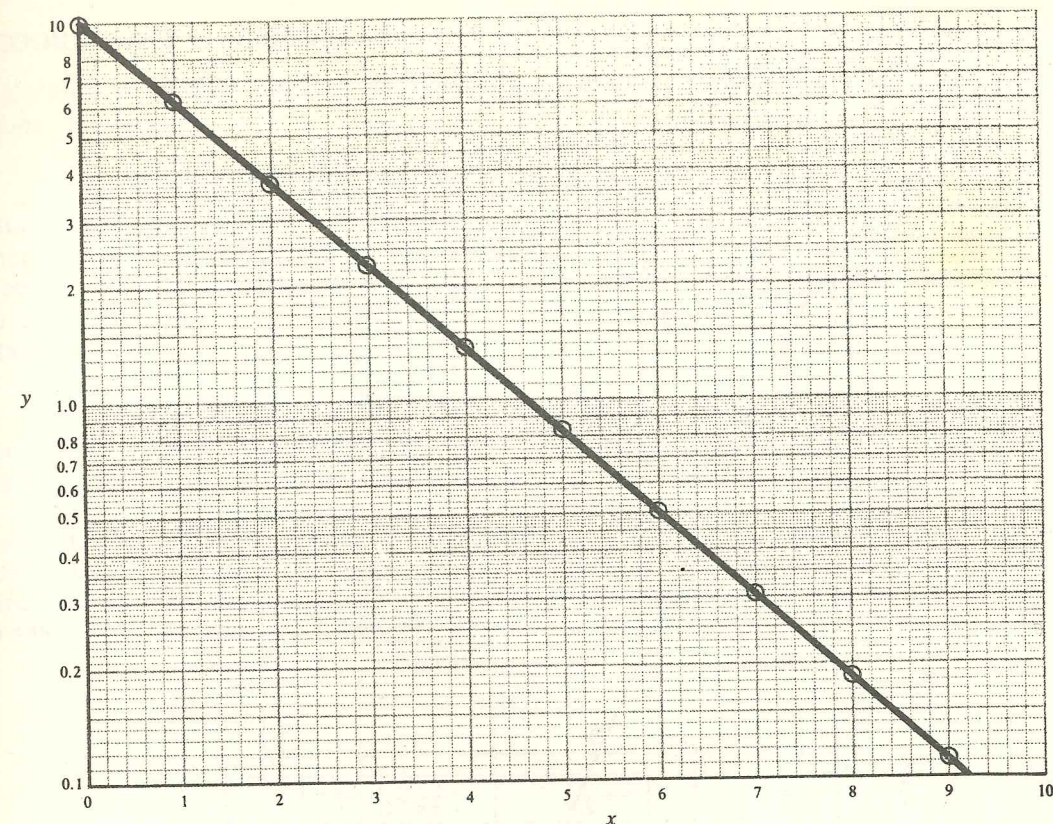


Fig. 3-12

Esempio 3.11. La velocità a cui avviene una reazione chimica è determinata da una *costante cinetica*, k . Questa costante varia con la temperatura secondo l'espressione

$$k = Ae^{-E/RT}$$

dove A = fattore di frequenza, s^{-1}
 E = energia di attivazione, J/mol
 R = costante universale dei gas, 8.32 J/mol.K
 T = temperatura assoluta, K

Determinare il fattore di frequenza e l'energia di attivazione dai seguenti dati.

T , K	338	328	318	308	298
k , $10^5 s^{-1}$	475	150	50	13	3.5

L'informazione richiesta si può ottenere mettendo in grafico k in funzione di $1/T$ su carta semilogaritmica. Si otterrà una linea retta la cui pendenza è $-0.434 E/R$ e la cui intercetta verticale è $\log A$.

La fig. 3-13 mostra i dati riportati su carta semilogaritmica a tre cicli. Da questa figura si vede che la pendenza può venire valutata mediante la

$$\frac{\Delta(\log k)}{\Delta(1/T)} = \frac{\log(1 \times 10^5) - \log(1000 \times 10^5)}{0.00346 - 0.00290} = \frac{5 - 8}{0.00056} = -5357$$

da cui si ottiene

$$-0.434 \frac{E}{R} = -5357 \quad \text{ovvero} \quad E = \frac{(-5357)(8.32)}{-0.434} = 1.027 \times 10^5 \text{ J/mol}$$

La vera intercetta verticale non può venire letta direttamente dalla fig. 3-13 poiché l'ascissa non incomincia con lo zero. Ma, avendo determinato il valore di E , si può calcolare il valore di A dalla

$$\log k = \log A - \left(0.434 \frac{E}{R}\right) \frac{1}{T}$$

Sappiamo che $k = 1000 \times 10^5 = 10^8$ quando $1/T = 0.0029$ (in base alla fig. 3-13). Quindi

$$\log 10^8 = \log A - (5357)(0.0029) \quad \text{ovvero} \quad 8 = \log A - 15.5353$$

da cui, risolvendo rispetto ad A , si ottiene

$$\log A = 8 + 15.5353 = 23.5353 \quad \text{ovvero} \quad A = 10^{23.5353} = 3.43 \times 10^{23} \text{ s}^{-1}$$

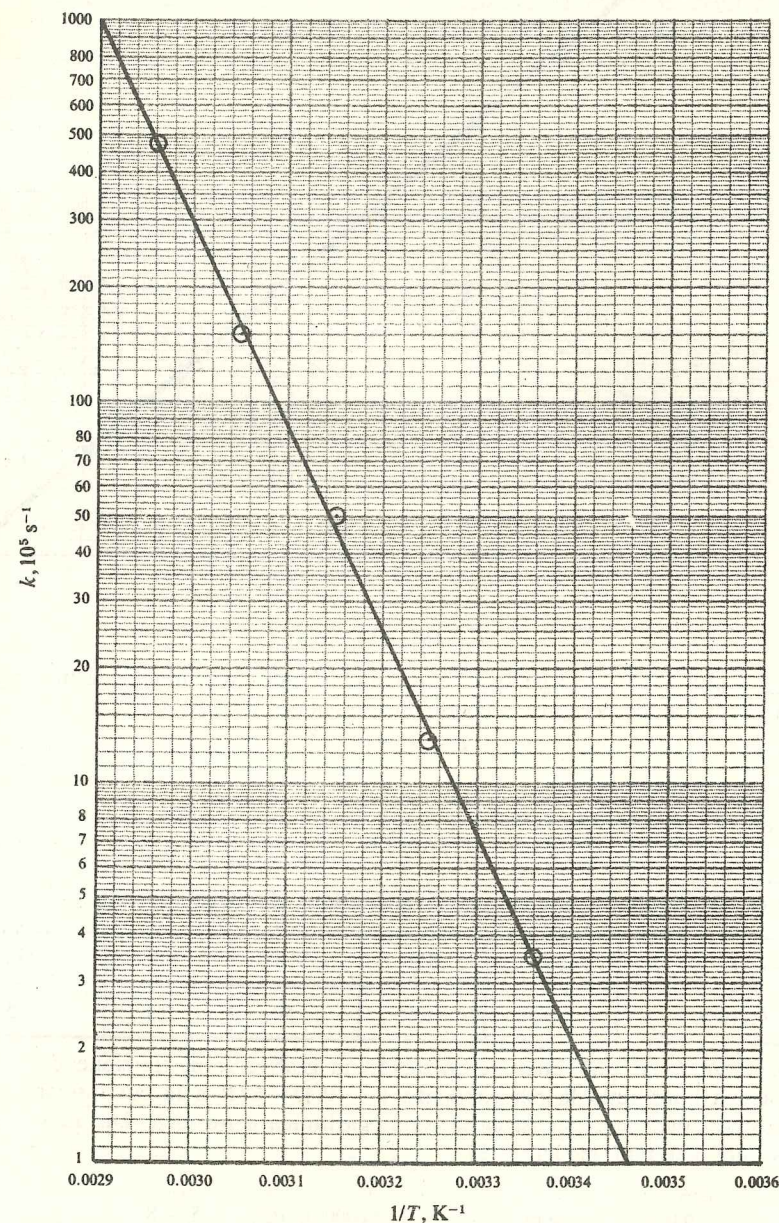


Fig. 3-13

Per controllare i nostri risultati, vediamo se è possibile ricalcolare qualche altro punto sulla linea. Per esempio, vediamo che k dovrebbe valere 7×10^5 quando $1/T = 0.0033$ (cioè a $T = 303 \text{ K}$). Se si calcola il valore di k quando $1/T = 0.0033$, si ottiene

$$\begin{aligned} k &= (3.43 \times 10^{23}) e^{-(1.027 \times 10^5 / 8.32)(0.0033)} = (3.43 \times 10^{23}) e^{-40.734} \\ &= (3.43 \times 10^{23})(2.0384 \times 10^{-18}) = 6.99 \times 10^5 \approx 7 \times 10^5 \end{aligned}$$

come previsto.

3.4 COORDINATE LOGARITMICHE

Un'altra equazione che compare frequentemente nel lavoro scientifico e tecnico è la *funzione di potenze*

$$y = ax^b$$

Questa equazione dà origine ad una curva quando viene rappresentata su carta millimetrata aritmetica (salvo il caso speciale in cui $b = 1$, che si risolve in una linea retta). Tuttavia si può ottenere una relazione lineare per qualsiasi valore di b mettendo in grafico $\log y$ in funzione di $\log x$. Infatti, prendendo i logaritmi di ciascuno dei membri dell'equazione sopra scritta, si ottiene

$$\log y = \log ax^b = \log a + b \log x$$

per cui, se si riporta in grafico $\log y$ in funzione di $\log x$, si otterrà una linea retta la cui pendenza è b e la cui intercetta verticale è $\log a$.

Esempio 3.12. Tracciare un diagramma dell'equazione $y = 0.2x^{1.8}$ in coordinate cartesiane. Costruire il grafico in due modi differenti: prima portando y in funzione di x , e poi $\log y$ in funzione di $\log x$.

Incominciamo col tabulare un certo numero di valori corrispondenti di x , y , $\log x$ e $\log y$, con l'aiuto di un calcolatore elettronico (v. la tab. 3-5).

Tabella 3-5

x	y	$\log x$	$\log y$
0	0.0		
1	0.200	0.0	-0.699
2	0.696	0.301	-0.157
3	1.44	0.477	0.160
4	2.43	0.602	0.385
5	3.62	0.699	0.559
6	5.03	0.778	0.702
7	6.64	0.845	0.822
8	8.44	0.903	0.927
9	10.44	0.954	1.019

I valori tabulati di y e di x sono messi in grafico in fig. 3-14. La curvatura di questa funzione appare subito con evidenza.

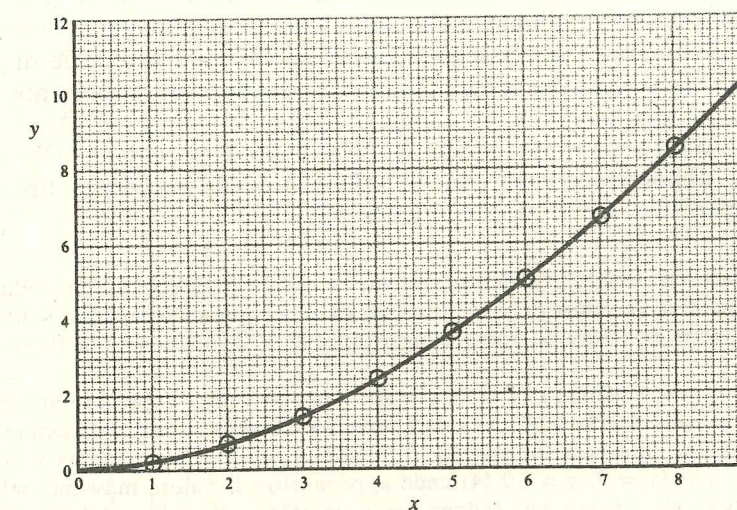


Fig. 3-14

La fig. 3-15 mostra un diagramma di $\log y$ in funzione di $\log x$, ottenuto facendo uso delle due ultime colonne della tab. 3-5. Si ottiene ora una linea retta avente pendenza 1.80 ed una intercetta verticale pari a -0.699 . Esaminando l'equazione data, si vede che $a = 0.2$, per cui

$$\log a = \log 0.2 = -0.699$$

come si osserva appunto in fig. 3-15. Ma nella data equazione è anche $b = 1.80$, che corrisponde al valore della pendenza determinato dalla fig. 3-15.

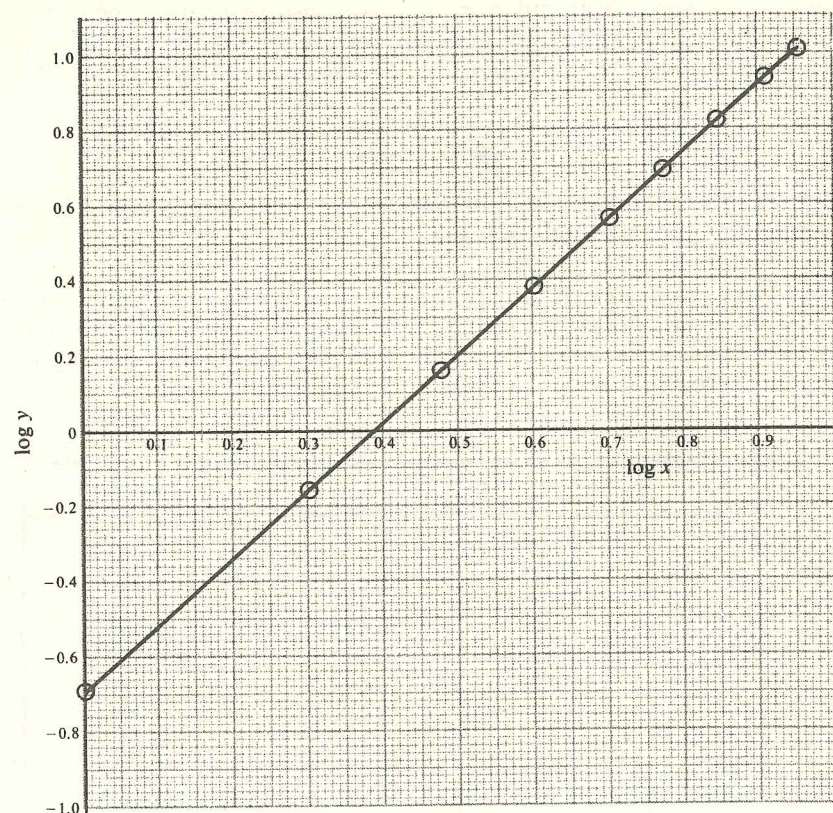


Fig. 3-15

Una maniera molto più facile di diagrammare $\log y$ in funzione di $\log x$ è quella di fare uso di carta millimetrata in *coordinate logaritmiche* (chiamata comunemente *carta bilogaritmica*), come è mostrato in fig. 3-16. Questo tipo di carta è simile alla carta semilogaritmica, salvo che *entrambe*, l'ordinata e l'ascissa, sono suddivise in intervalli proporzionali a $\log y$ e a $\log x$. Gli assi sono contrassegnati, tuttavia, in unità ordinarie di y e di x , per cui non è necessario calcolare effettivamente i logaritmi quando si rappresenta una funzione di potenze in coordinate logaritmiche.

La fig. 3-16 è indicata come carta bilogaritmica 1×1 (cioè 1 ciclo $\times$ 1 ciclo) poiché l'ordinata e l'ascissa abbracciano ciascuna un solo ordine di grandezza (un solo fattore di dieci). E' anche disponibile carta bilogaritmica a più cicli.

Esempio 3.13. Tracciare un diagramma dell'equazione $y = 0.2x^{1.8}$ in coordinate bilogaritmiche.

Si sono già ottenuti diversi valori di y in funzione di x per questa equazione nella tab. 3-5. Questi valori si possono facilmente riportare su carta bilogaritmica 2×2 , ottenendo la linea retta mostrata in fig. 3-17.

Si noti che il primo punto tabulato ($x = 0$, $y = 0$) non può venire rappresentato, poiché l'ordinata e l'ascissa incominciano sempre con qualche valore diverso da zero su un diagramma bilogaritmico. (In questo caso particolare, l'ordinata incomincia col valore $y = 0.1$ e l'ascissa con $x = 1.0$). Si noti anche che l'ultimo punto tabulato ($x = 9$, $y = 10.44$) cade appena oltre il valore massimo dell'ordinata $y = 10$. Infine, si noti che tutti i valori x tabulati cadono entro un solo ordine di grandezza. Perciò sarebbe stato probabilmente più conveniente diagrammare i dati su una carta bilogaritmica 2×1 anziché su una 2×2 .

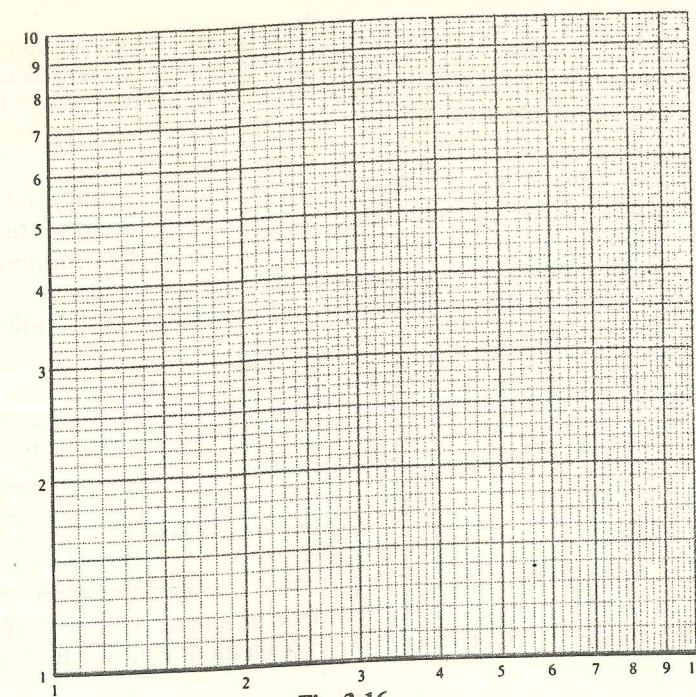


Fig. 3-16

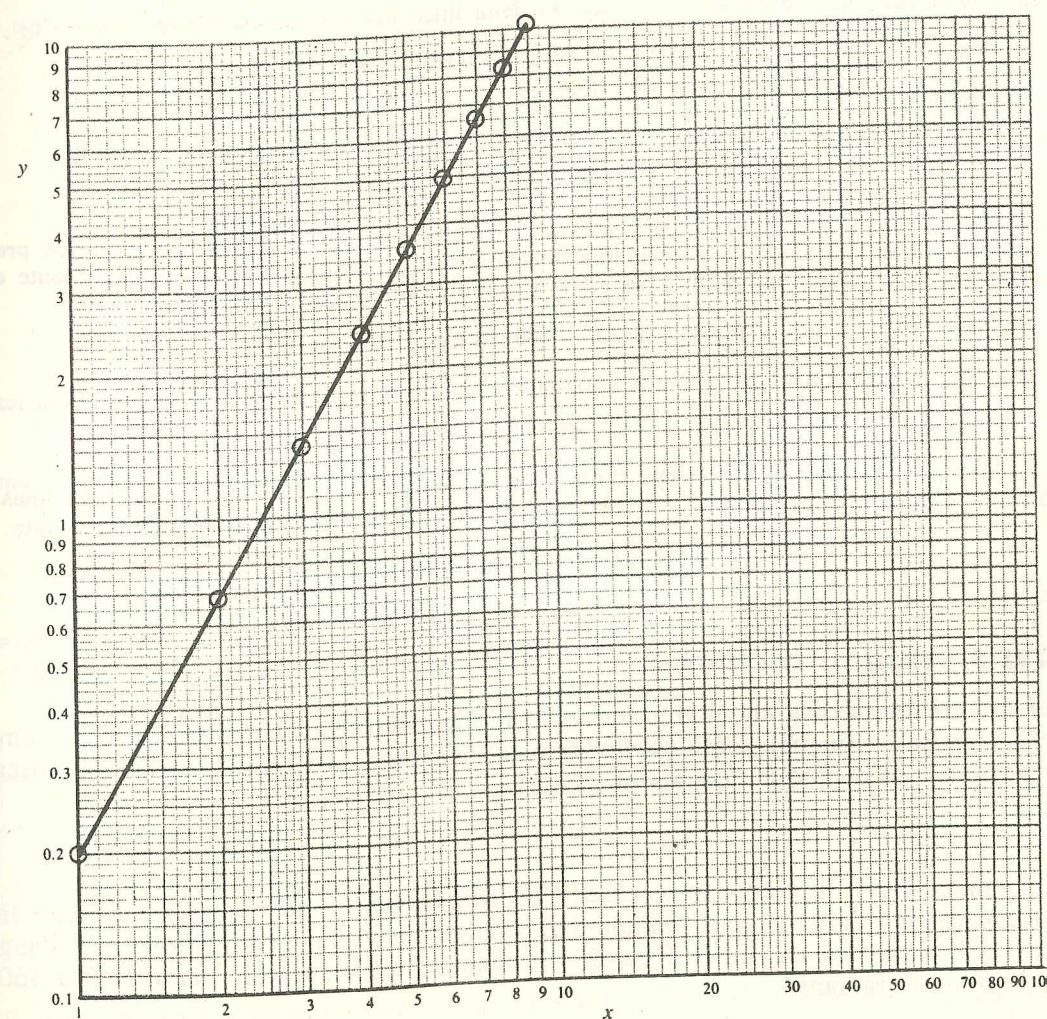


Fig. 3-17

Si ricorda ancora al lettore che la fig. 3.17 è effettivamente un diagramma di $\log y$ in funzione di $\log x$ (si confronti con la fig. 3.15), anche se si sono riportati sul grafico i valori tabulati di y in funzione di x (e non quelli di $\log y$ in funzione di $\log x$). Con ciò la conversione da y ed x a $\log y$ ed a $\log x$ è realizzata automaticamente dalle coordinate logaritmiche.

I dati sperimentali possono molto spesso dare origine ad una linea retta su carta bilogarithmica. Ciò implica, naturalmente, che tali dati possano essere rappresentati da una funzione di potenze. Le costanti della funzione di potenze possono venire determinate per via grafica, calcolando la pendenza della linea tracciata attraverso i dati. Quando si effettua questo calcolo, tuttavia, sarà necessario lavorare con i logaritmi dei valori letti sulle ordinate e sulle ascisse, anziché con i valori stessi.

Esempio 3.14. Determinare se i seguenti dati possono o non possono venire rappresentati da una funzione di potenze. Se la funzione di potenze risulta valida, valutarne anche le costanti.

x	2	4	7	10	20	40	60	80
y	45	26	17	12.5	7.3	4.2	3.0	2.4

Riportando i dati su carta bilogarithmica 2×2 , si ottiene una linea retta ben definita, come mostrato in fig. 3-18. Con ciò i dati possono effettivamente venire rappresentati con una funzione di potenze della forma

$$y = ax^b$$

Il valore della costante b è uguale alla pendenza della linea nel diagramma bilogarithmico. Così, dalla fig. 3-18,

$$b = \frac{\Delta(\log y)}{\Delta(\log x)} = \frac{\log 2 - \log 80}{\log 100 - \log 1} = \frac{0.30103 - 1.90309}{2 - 0} = -0.80103.$$

Si può fare uso del valore noto di b per determinare il valore di a . Per fare ciò, scriviamo

$$\log y = \log a - 0.80103 \log x$$

Si può ora scegliere un punto qualsiasi sulla linea, sostituire i valori di x e di y nell'equazione precedente, e risolverla rispetto a $\log a$. E' particolarmente conveniente scegliere il punto corrispondente ad $x = 1$ poiché $\log 1 = 0$. Dalla fig. 3-18, si vede che $y = 80$ quando $x = 1$, per cui

$$\log 80 = \log a - 0.80103 \log 1 = \log a$$

e quindi $a = 80$. La funzione di potenze che corrisponde alla linea retta in fig. 3-18 si può allora scrivere

$$y = 80x^{-0.80103}$$

Questo risultato può facilmente essere controllato ricalcolando qualche altro punto sulla linea. Per esempio, si vede che $y = 2$ quando $x = 100$. Sostituendo $x = 100$ nell'equazione sopra ottenuta, si ha

$$y = 80(100)^{-0.80103} = 80(0.025) = 2$$

come previsto.

3.5 ALTRI SISTEMI DI COORDINATE

Diversi altri tipi di diagrammi si usano nelle applicazioni tecniche, anche se meno comunemente dei grafici aritmetici, semilogarithmici e bilogarithmici. In questo paragrafo, discuteremo brevemente tre di questi diagrammi.

Coordinate polari

In alcuni problemi tecnici si impiegano le *coordinate polari*, nelle quali la variabile dipendente è rappresentata dalla distanza radiale dall'origine. La variabile indipendente è l'angolo compreso fra il raggio ed una linea fissa di riferimento; questo angolo varia da 0 a 360° (oppure da 0 a 2π radianti).

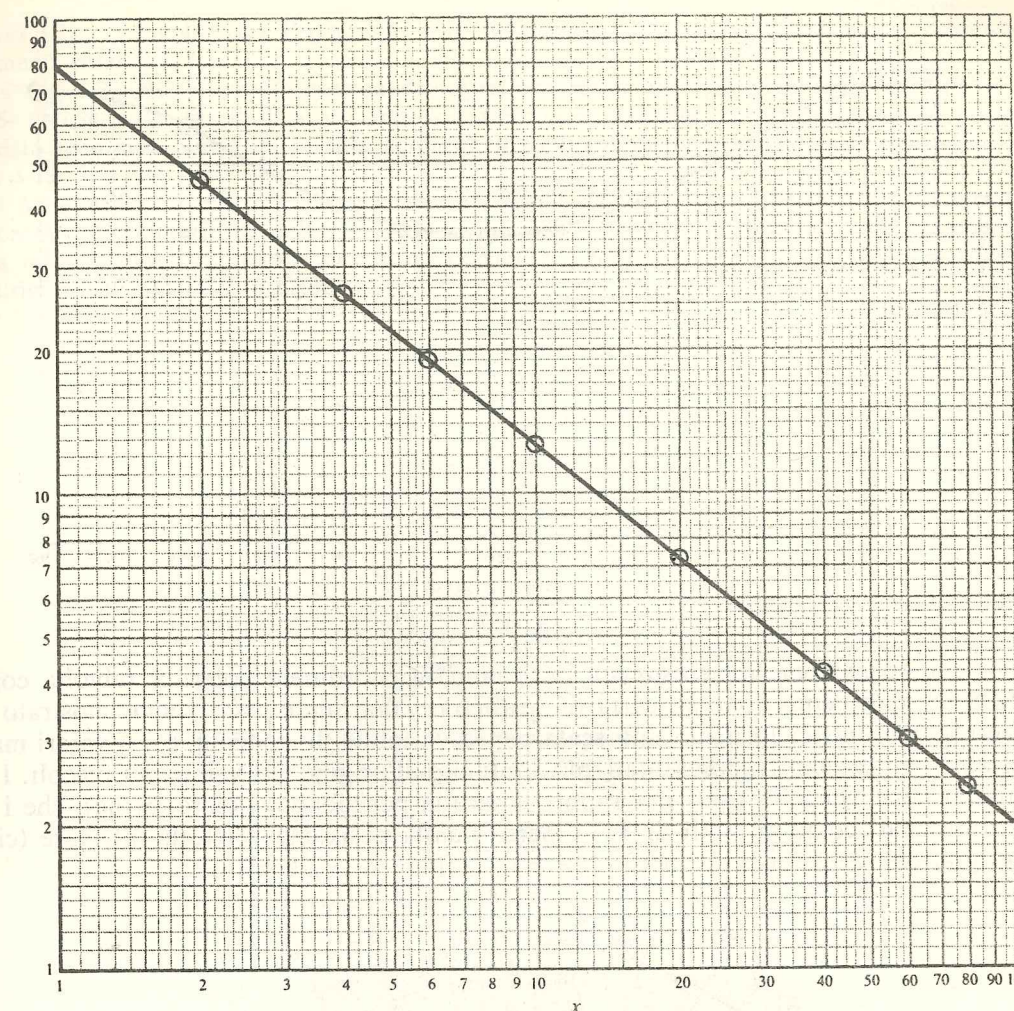


Fig. 3-18

Esempio 3.15. La temperatura sulla superficie di un cilindro metallico è data dall'equazione

$$T = 100 + 20 \cos(\theta/57.3) \quad 0 \leq \theta \leq 360^\circ$$

dove T = temperatura, °C (variabile dipendente)
 θ = angolo relativo ad una posizione fissata (variabile indipendente)

Preparare un diagramma di T in funzione di θ su carta millimetrata aritmetica.

Si incomincia col tabulare diversi valori di θ e di T , utilizzando un calcolatore elettronico.

θ , gradi	0	30	60	90	120	150	180
T , °C	120.0	117.3	110.0	100.0	90.0	82.7	80.0
θ	210	240	270	300	330	360	
T	82.7	90.0	100.0	110.0	117.3	120.0	

Questi valori, riportati in grafico, danno origine ad una curva sinusoidale continua mostrata in fig. 3.19.

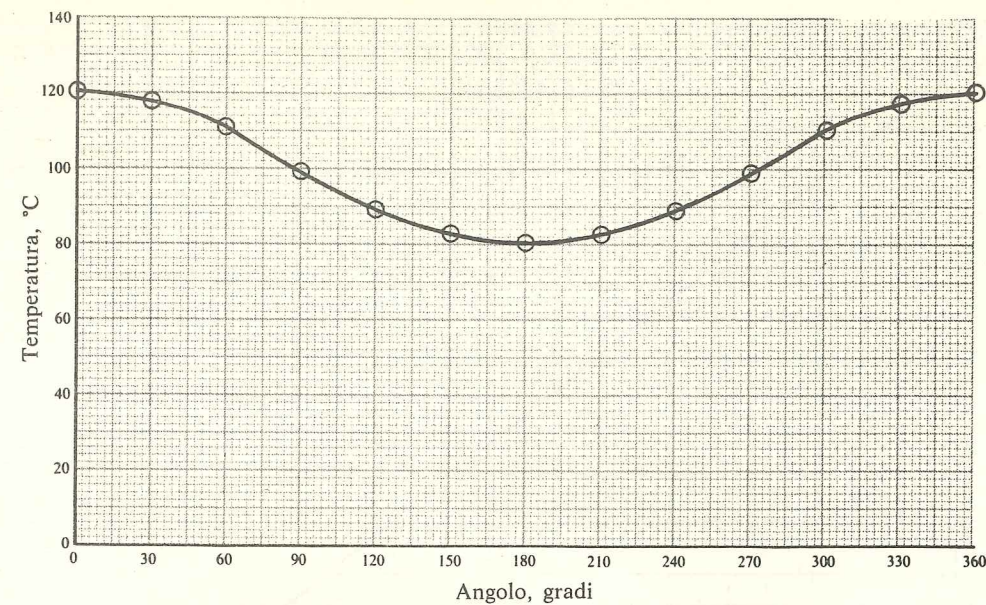


Fig. 3-19

Quando un'equazione viene espressa in termini di coordinate polari, è talvolta conveniente diagrammare l'equazione su carta da grafico *in coordinate polari*, come mostrato in fig. 3-20. I cerchi concentrici formano una scala per la variabile dipendente, con i valori maggiori della variabile dipendente rappresentati più lontani dall'origine dei valori più piccoli. I raggi uscenti dall'origine vengono usati per rappresentare la posizione angolare. Si noti che i raggi sono contrassegnati come multipli di 10° a partire dalla posizione verticale inferiore (cioè dal fondo del grafico).

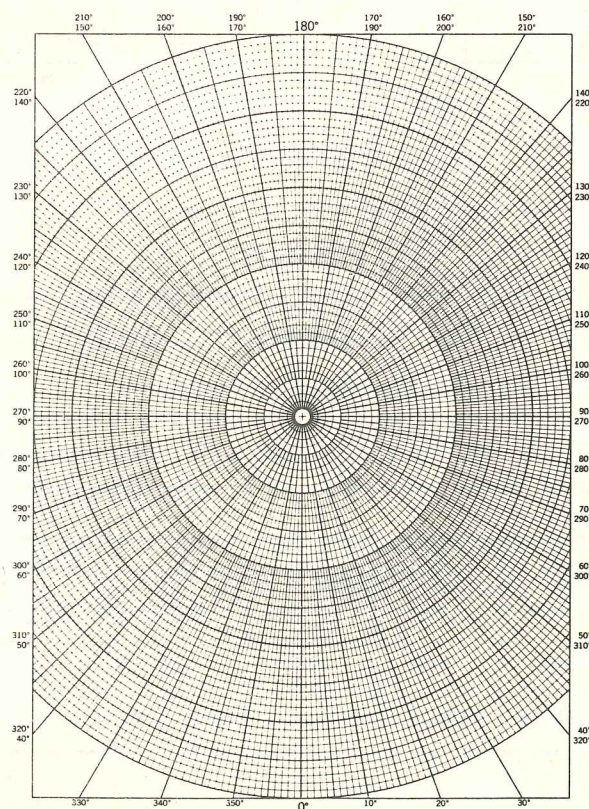


Fig. 3-20

Esempio 3.16. Rappresentare l'equazione data nell'esempio 3.15 su carta da grafico in coordinate polari (diagrammi polari).

La fig. 3.21 mostra un diagramma dell'equazione basato sui valori tabulati presentati nell'esempio 3.15. Si noti la curva chiusa di forma approssimativamente circolare che è stata tracciata attraverso i punti-dato (che pure non è un cerchio perfetto), in contrapposizione con la curva sinusoidale mostrata in fig. 3-19.

Si noti anche che, per ragioni di simmetria, non è stato necessario specificare se le misure angolari sono orarie od antiorarie. E' tuttavia consuetudine che θ si consideri crescente nella direzione antioraria. Questa informazione deve venire specificata (ovvero risultare evidente) per quei diagrammi che non sono simmetrici rispetto all'asse verticale.

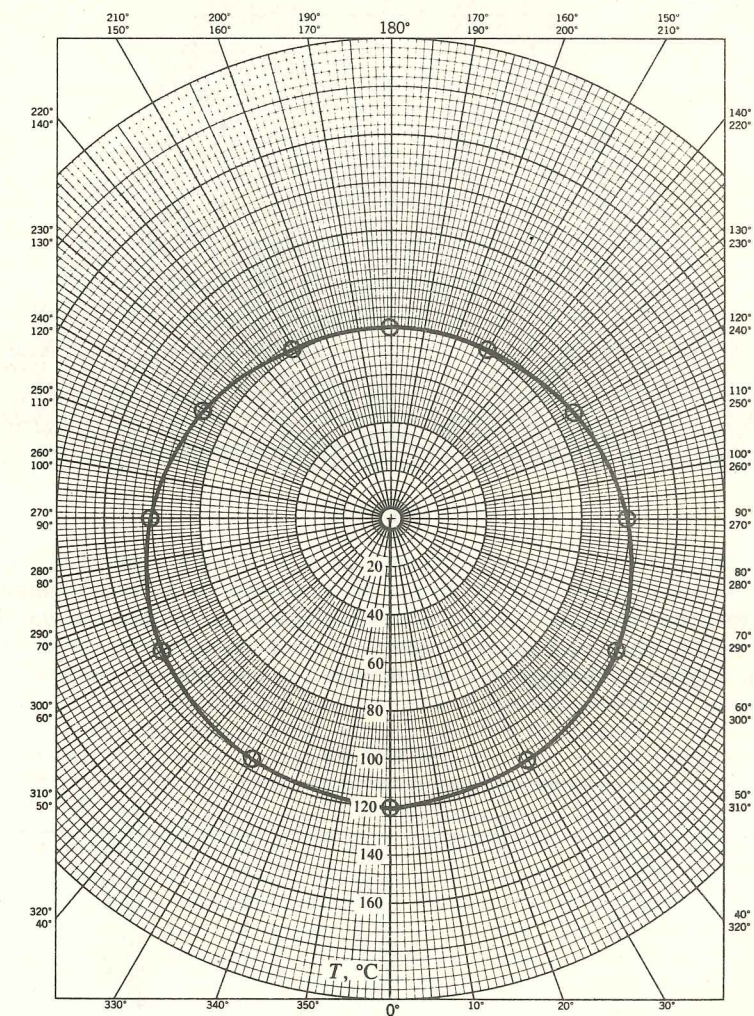


Fig. 3-21

Coordinate triangolari

Per rappresentare le proprietà di sistemi a tre componenti vengono talvolta utilizzate le *coordinate triangolari*. Conviene infatti rappresentare questo tipo di informazioni in diagrammi triangolari, come è mostrato in fig. 3-22. Ciascuno dei vertici del triangolo rappresenta un singolo componente. Le miscele di due componenti sono rappresentate lungo i bordi (assi) del grafico, mentre le miscele a tre componenti sono rappresentate da punti interni al grafico. L'uso di questi grafici si basa sul fatto geometrico che le distanze (coordinate) di un punto interno dai tre lati di un triangolo equilatero hanno una somma fissata (per es. 100%).

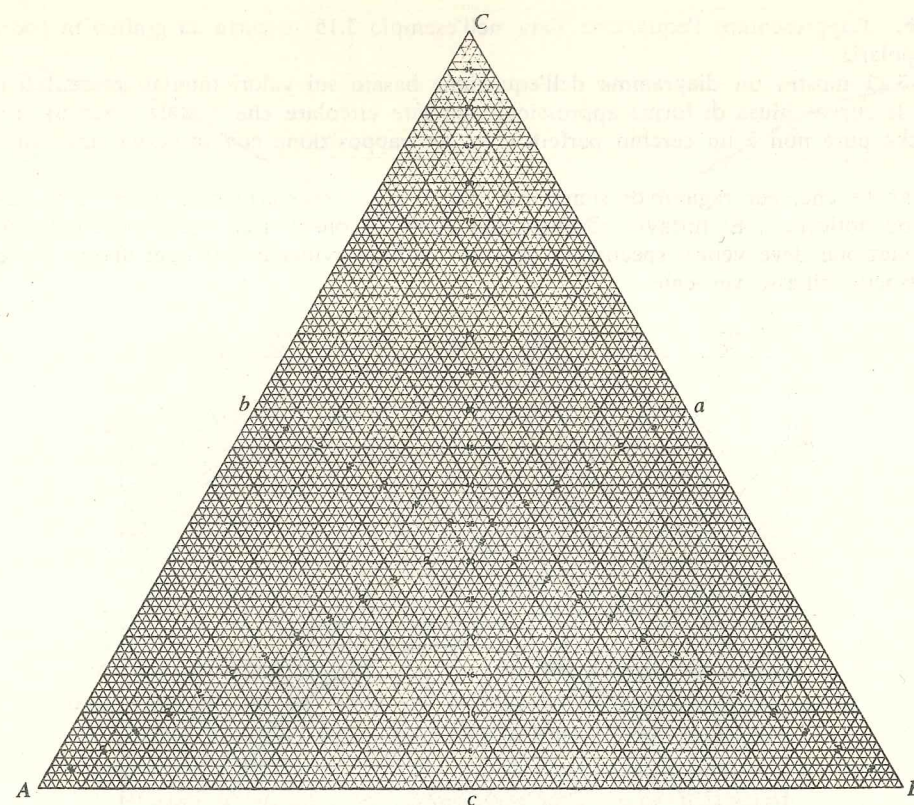


Fig. 3-22

Esempio 3.17. Il benzene e l'acetone sono comuni composti chimici organici che vengono utilizzati in molte sintesi organiche per la produzione di diversi prodotti plastici, tessili e farmaceutici. Se il benzene, l'acetone e l'acqua vengono mescolati fra loro in certe proporzioni, si formano due fasi liquide distinte. Le particolari composizioni che si separano in questo modo possono venire rappresentate come una regione speciale su un diagramma triangolare. Alcuni punti che giacciono sul confine di questa regione sono elencati nella tab. 3-6.

Tabella 3-6

Benzene, %	Acetone, %	Acqua, %
0.1	0.0	99.9
0.1	10.0	89.9
0.3	20.0	79.7
0.7	30.0	69.3
1.4	40.0	58.6
3.2	50.0	46.8
9.0	60.0	31.0
24.1	65.3	10.6
99.9	0.0	0.1
89.8	10.0	0.2
79.6	20.0	0.4
69.3	30.0	0.7
58.5	40.0	1.5
47.1	50.0	2.9
34.2	60.0	5.8

I dati sono rappresentati su un diagramma triangolare in fig. 3-23. Si noti che una curva continua è stata tracciata attraverso i dati. Questa curva forma il confine fra le regioni monofase e bifase del diagramma.

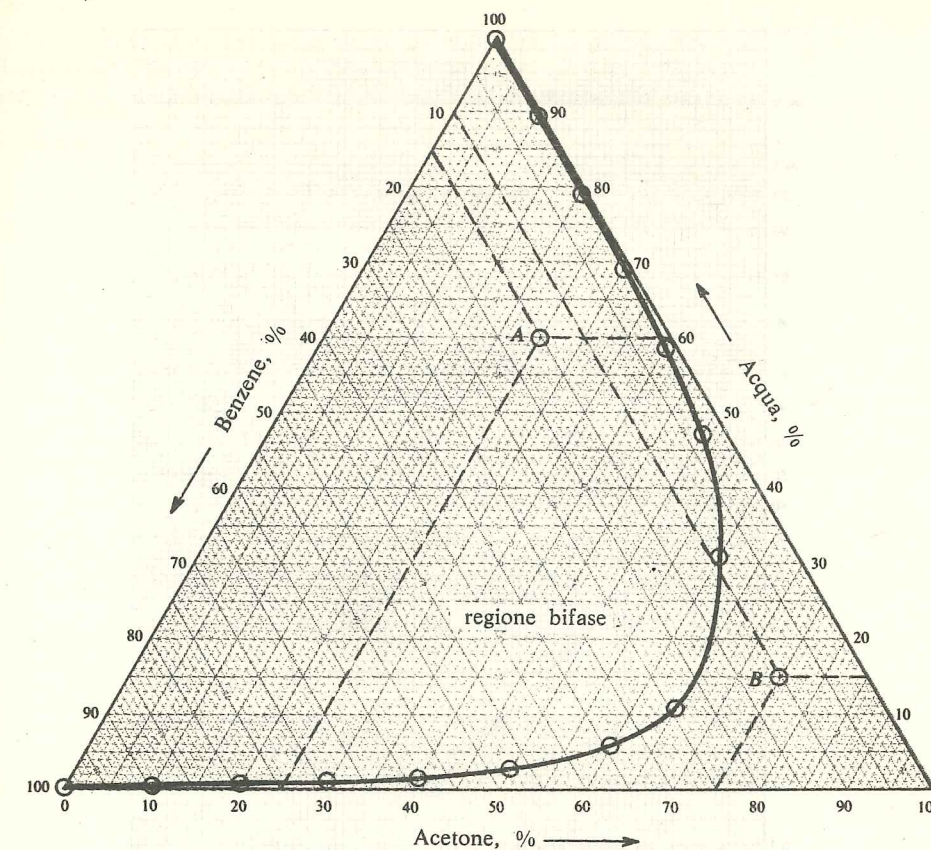


Fig. 3-23

Si vede che il vertice inferiore di sinistra, nella fig. 3-23, rappresenta il benzene puro, il vertice inferiore di destra l'acetone puro ed il vertice superiore l'acqua pura. Ciascuno degli assi rappresenta una miscela dei due componenti rappresentati dai suoi vertici estremi. Così il punto contrassegnato con 20 sull'asse inferiore (orizzontale) rappresenta una miscela col 20% di acetone e l'80% di benzene.

I punti interni in fig. 3-23 rappresentano varie miscele a tre componenti di benzene, acetone ed acqua. Così il punto A rappresenta una miscela ternaria col 25% di acetone, il 60% d'acqua ed il 15% di benzene, come è indicato dalle linee tratteggiate. (Si noti che, per ciascun componente, la linea tratteggiata corrispondente corre parallela all'asse opposto al vertice che lo rappresenta). Questo punto cade entro la regione bifase, che è limitata dalla curva condotta attraverso i punti-dato precedentemente indicati e dall'asse benzene-acqua. Quindi una miscela col 25% di acetone, il 15% di benzene ed il 60% di acqua si separerà in due fasi distinte, l'una contenente prevalentemente acqua ed acetone e l'altra consistente principalmente di benzene e di acetone. La composizione di ciascuna fase sarà rappresentata da un certo punto sulla curva limite. L'esatta collocazione di questi punti va tuttavia oltre lo scopo di questa discussione.

In contrapposizione, il punto B rappresenta una miscela ternaria col 75% di acetone, il 15% di acqua ed il 10% di benzene. Questo punto non cade all'interno della regione bifase: quindi una miscela di questa composizione non si separerà in due fasi distinte.

Coordinate probabilistiche

I dati di una distribuzione cumulativa (v. il par. 3.2) vengono rappresentati talvolta in diagrammi di probabilità. L'ordinata di un diagramma probabilistico è suddivisa in una scala tale che una distribuzione cumulativa normale possa essere rappresentata come una linea retta. (La distribuzione normale o gaussiana è una distribuzione simmetrica, a forma di campana, le cui proprietà matematiche sono ben note. La variazione di molti fenomeni fisici e biologici è governata dalla distribuzione normale. Discuteremo la distribuzione normale con maggiori dettagli nel par. 4.8.) L'applicabilità della distribuzione normale ad un gruppo di dati può allora venire determinata rappresentando le frequenze relative cumulative dei dati in un diagramma di probabilità ed andando a vedere se si ottiene o no una linea retta. La fig. 3-24 mostra un foglio tipico di un diagramma di probabilità.

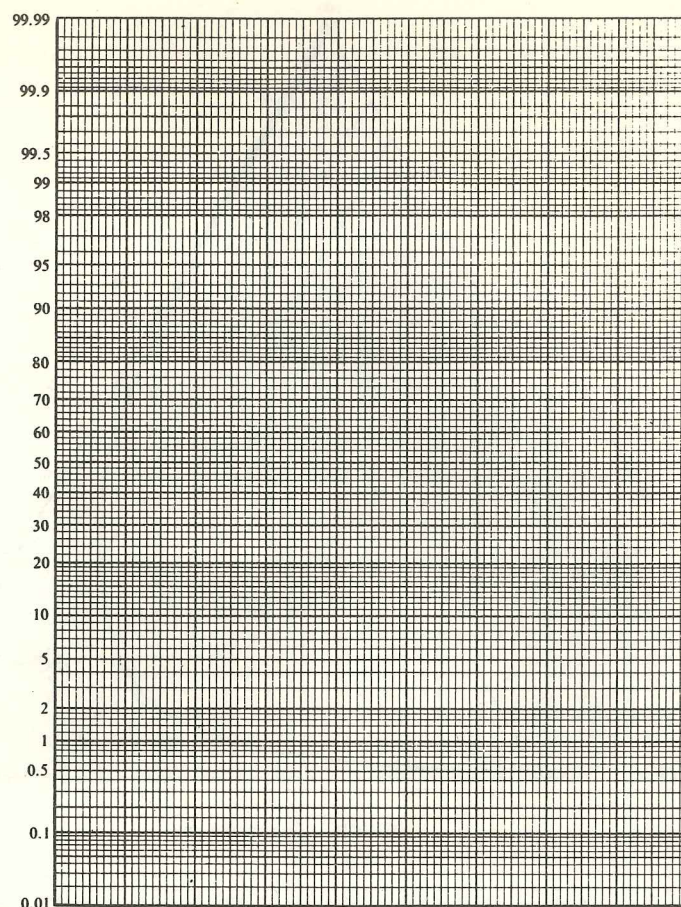


Fig. 3-24

Quando si rappresentano dati di distribuzione cumulativa per intervalli discreti, è consuetudine riportare sull'ascissa per ciascun intervallo il suo estremo superiore anziché il suo punto medio.

Esempio 3.18. Una fabbrica produce circuiti integrati (*chips*) per calcolatori elettronici. Il dipartimento di ingegneria industriale ha ottenuto dati sul numero di circuiti integrati difettosi fabbricati durante ciascuno di diversi turni di lavoro di 8 ore; questi dati sono mostrati nelle prime due colonne della tab. 3-7. Le due colonne restanti sono state derivate da queste informazioni, utilizzando il metodo descritto nel par. 3.2.

Tabella 3-7

Difetti per turno di lavoro	Numero di casi	Frequenza relativa, %	Frequenza relativa cumulativa, %
0-2	0		
3-4	2	3.6	3.6
5-6	4	7.3	10.9
7-8	8	14.5	25.4
9-10	12	21.8	47.2
11-12	13	23.6	70.8
13-14	9	16.4	87.2
15-16	5	9.1	96.3
17-18	2	3.6	99.9
TOTALI	55	99.9%	

La fig. 3-25 mostra un diagramma di probabilità dei dati di distribuzione cumulativa. Si vede che tutti i dati, ad eccezione dell'ultimo punto-dato, cadono sulla linea retta. Si conclude quindi che la variazione nel numero di circuiti integrati difettosi valutata su diversi turni di 8 ore è governata da una distribuzione normale.

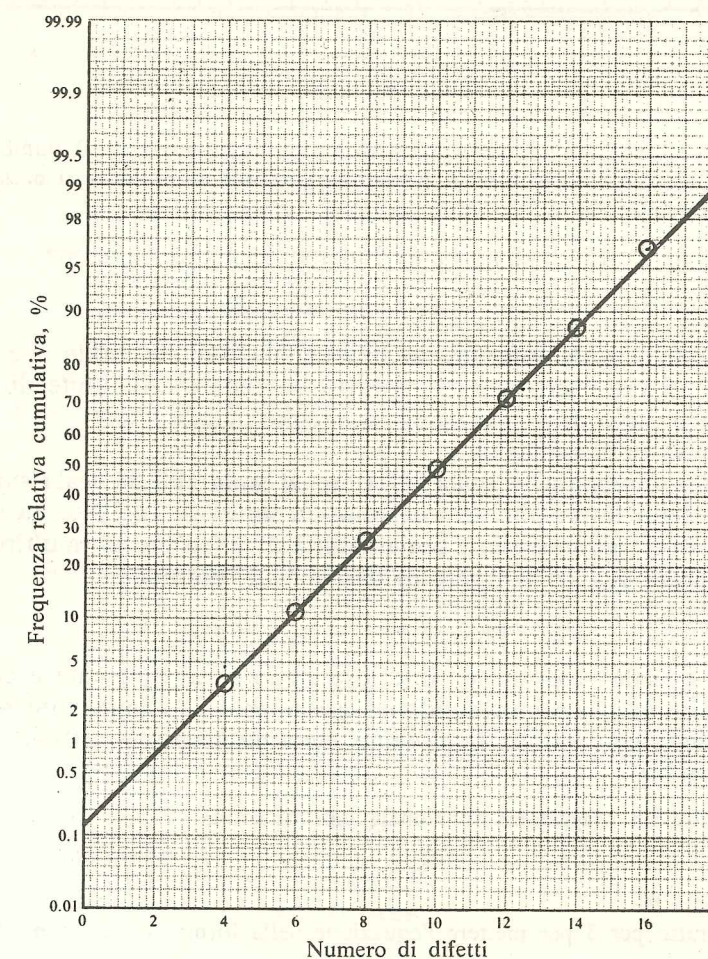


Fig. 3-25

3.6 NOMOGRAMMI

Un *nomogramma* è una rappresentazione grafica di un'equazione algebrica o di altro tipo. A differenza dei diagrammi ordinari, un nomogramma non impiega un sistema di coordinate bidimensionale. Esso consiste invece di più scale, generalmente poste l'una parallela all'altra, le cui unità e posizione relativa risultano determinate dall'equazione corrispondente. Il nomogramma si legge collegando particolari punti collocati sulle varie scale.

In questo libro prenderemo in considerazione due tipi di nomogrammi: i *diagrammi funzionali* e gli *abachi*.

Diagrammi funzionali

Un diagramma funzionale viene usato per rappresentare un'equazione della forma $y = ax + b$, dove a e b sono costanti note ($b = 0$ in molti casi di interesse pratico). Questo tipo di nomogramma consiste di due scale adiacenti l'una all'altra. Un diagramma funzionale si legge collocando un punto su una delle scale e determinando il valore corrispondente a quel punto in base all'altra scala.

Esempio 3.19. La fig. 3-26 mostra un diagramma funzionale per convertire i piedi in metri. Questo diagramma funzionale è basato sull'equazione $F = 3.28 M$, dove F rappresenta i piedi ed M i metri (v. l'appendice A).

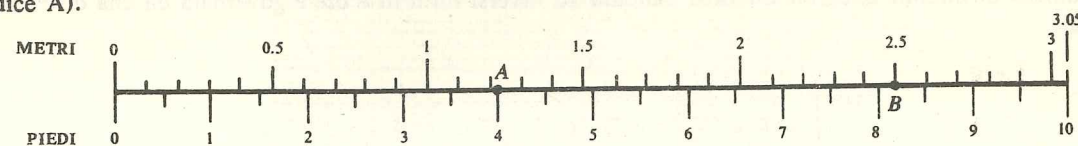


Fig. 3-26

Dalla fig. 3-26 si vede che 4 piedi corrispondono a circa 1.22 metri (v. il punto A). Similmente, 2.5 metri equivalgono a circa 8.2 piedi (v. il punto B). Ulteriori equivalenze si possono stabilire scegliendo altri punti sul diagramma.

E' molto facile costruire un diagramma funzionale per la funzione

$$y = ax + b \quad (a > 0)$$

Si suddivide dapprima la scala inferiore in intervalli uguali, in modo che ciascun intervallo rappresenti un'unità di x (ovvero un suo multiplo prefissato). Il limite di sinistra rappresenta $x_{\min}$, il valore più piccolo di x (che spesso si sceglie uguale a zero) ed il limite di destra rappresenta $x_{\max}$, il valore massimo di x .

Dopo che è stata disegnata la scala inferiore, si suddivide la scala superiore in intervalli uguali, in modo che ogni intervallo sia $1/a$ volte un intervallo della scala inferiore. Ciascuno degli intervalli superiori rappresenterà ora un'unità di y (od un suo multiplo fissato). Il limite di sinistra rappresenterà $y_{\min}$ ed il limite di destra $y_{\max}$, essendo

$$y_{\min} = ax_{\min} + b \quad y_{\max} = ax_{\max} + b$$

Una volta che le scale superiore ed inferiore siano state disegnate e contrassegnate, ciascuna scala può venire ulteriormente suddivisa, se si vuole, in opportuni sottointervalli. Una semplice modifica della costruzione precedente riguarda il caso $a < 0$ (si veda, più avanti, la discussione sugli abachi).

Esempio 3.20. Costruire un diagramma funzionale dell'equazione

$$3y = 2x + 6$$

per l'intervallo $-3 \leq x < 9$.

Si divida innanzitutto per 3 per mettere l'equazione nella forma $y = ax + b$. Con ciò

$$y = \frac{2}{3}x + 2$$

per cui $a = 2/3$ e $b = 2$.

Si può ora costruire la scala inferiore del diagramma funzionale, come è mostrato in fig. 3-27

(a) Si vede che la scala è suddivisa in intervalli pari ad un'unità di x , che vanno da $x_{\min} = -3$ ad $x_{\max} = 9$.

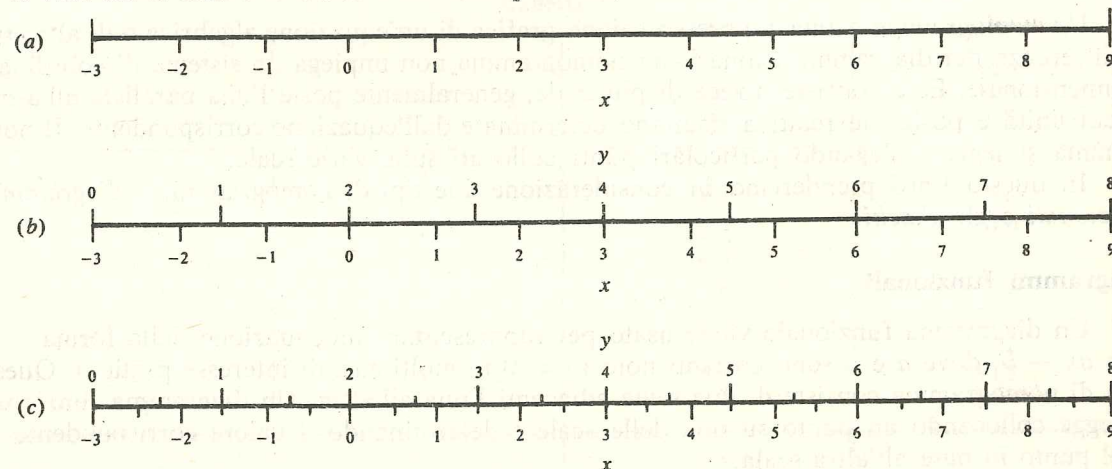


Fig. 3-27

La scala superiore viene aggiunta in fig. 3-27(b). Ciascun intervallo della scala superiore è $1/a = 1.5$ volte il singolo intervallo della scala inferiore. Si osservi che

$$y_{\min} = \frac{2}{3}(-3) + 2 = 0 \quad y_{\max} = \frac{2}{3}(9) + 2 = 8$$

Infine, la fig. 3-27(c) mostra il diagramma funzionale completato suddividendo ulteriormente le scale superiore ed inferiore in opportuni sotto-intervalli.

Abachi

Un abaco si utilizza per rappresentare una equazione che contiene tre o più variabili. Si deve costruire una scala separata per ciascuna variabile. L'abaco si legge collocando un punto su due delle scale (scegliendo così i valori di due delle variabili) e collegando questi due punti con una retta. Questa retta viene poi prolungata, se necessario, fino a che non interseca una terza scala. Il punto d'intersezione determina il valore della terza variabile (incognita).

Esempio 3.21. La fig. 3-28 mostra un abaco per un'equazione che collega le variabili x , y e z . Il diagramma consiste di tre scale parallele, ciascuna suddivisa in intervalli uguali. Si osservi, tuttavia, che la lunghezza dell'intervallo ed il numero di unità per intervallo variano da una scala all'altra.

Facciamo uso della fig. 3-28 per determinare il valore di z corrispondente ad $x = 25$ e ad $y = 20$. Troviamo anche il valore di x corrispondente ad $y = 2$ e a $z = 3$.

Per risolvere la prima parte del problema, sistemiamo i punti $x = 25$, $y = 20$ e colleghiamoli con una retta, come è mostrato in fig. 3-28. Questa retta interseca la scala delle z in corrispondenza di $z = 9$. Si ha dunque $z = 9$ quando è $x = 25$ ed $y = 20$.

La seconda parte del problema si risolve sistemando i punti $y = 2$, $z = 3$ e collegandoli con una retta (v. sempre la fig. 3-28). Questa retta viene poi prolungata fino alla scala delle x , che interseca nel punto $x = 20$. Per cui è $x = 20$ quando $y = 2$ e $z = 3$.

Rivolgiamo ora l'attenzione alla costruzione di un abaco per l'equazione

$$z = ax + by \quad (a > 0, b > 0)$$

Si incomincia col tracciare una linea orizzontale, da ciascuna estremità della quale si innalzano poi delle perpendicolari. Queste perpendicolari rappresenteranno le scale della x e della y . La lunghezza delle perpendicolari, così come la distanza fra di esse, è arbitraria.

Si suddivide poi ciascuna perpendicolare in intervalli uguali. Ciascun intervallo sulla scala delle x (la perpendicolare di sinistra) corrisponderà ad un'unità di x (o ad un suo multiplo fissato), e ciascuna unità sulla scala delle y (la perpendicolare di destra) rappresenterà un'unità di y (od un suo multiplo fissato).

Supponiamo che p rappresenti la lunghezza di una unità di x e q rappresenti la lunghezza di una unità di y . La scala delle z può ora venire collocata fra le scale della x e della y . Per fare ciò, si innalzi una terza perpendicolare fra le scale della x e della y , in modo tale che

$$\frac{L_1}{L_1 + L_2} = \frac{bp}{bp + aq}$$

dove L_1 ed L_2 sono le distanze mostrate in fig. 3-29.

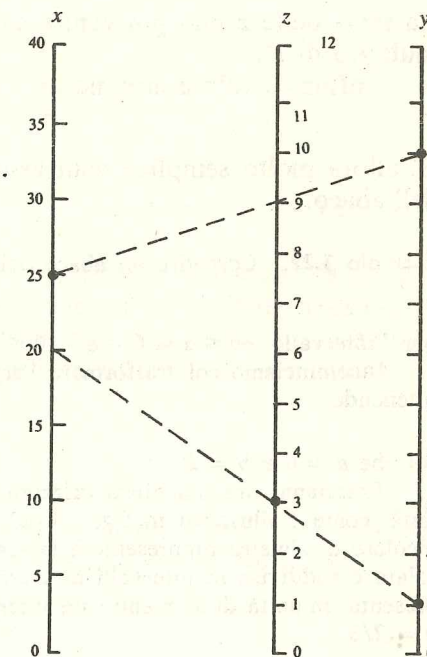


Fig. 3-28

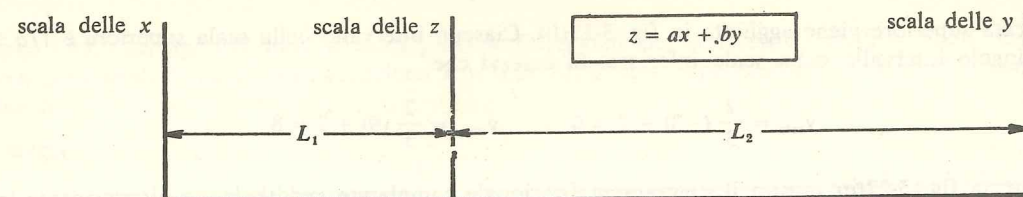


Fig. 3-29

Una volta stabilita la posizione della scala delle z , e tracciata una perpendicolare che la rappresenta, la lunghezza di una unità di z , r , si calcola con l'equazione

$$r = \frac{pq}{bp + aq}$$

La scala delle z può poi venire suddivisa in intervalli uguali di lunghezza r (o di un qualche multiplo di r).

Infine, il valore minimo di z si determina dalla

$$z_{\min} = ax_{\min} + by_{\min}$$

E' allora molto semplice contrassegnare la scala delle z , completando così il tracciamento dell'abaco.

Esempio 3.22. Costruire un abaco dell'equazione

$$2z = 12x + 4y$$

per l'intervallo $-6 \leq x \leq 6$ e $0 \leq y \leq 36$.

Incominciamo col trasformare l'equazione nella forma $z = ax + by$. A tale scopo, dividiamo per 2, ottenendo

$$z = 6x + 2y$$

col che $a = 6$ e $b = 2$.

Tracciamo ora una linea orizzontale lunga 16 cm, con una perpendicolare a ciascuna delle sue estremità, come è illustrato in fig. 3-30(a). (Si noti che la figura compare in dimensioni ridotte). La perpendicolare di sinistra rappresenterà la scala delle x e quella di destra la scala delle y . Ciascuna perpendicolare è suddivisa in intervalli di 2 cm. Va tuttavia osservato che un intervallo sulla scala delle x rappresenta un'unità di x , mentre un intervallo sulla scala delle y rappresenta tre unità y . Con ciò, $p = 2$ e $q = 2/3$.

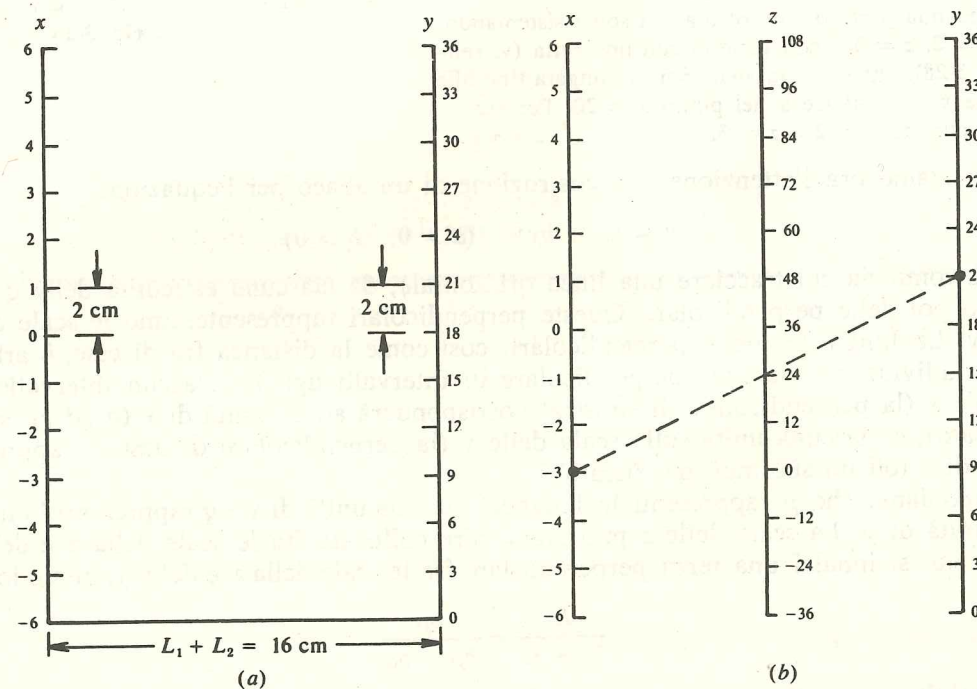


Fig. 3-30

Posizioniamo ora la scala delle z utilizzando l'equazione

$$\frac{L_1}{L_1 + L_2} = \frac{bp}{bp + aq} = \frac{(2)(2)}{(2)(2) + (6)(2/3)} = \frac{4}{4 + 4} = \frac{1}{2}$$

Con ciò la scala delle z sarà collocata a metà fra le scale della x e della y , come mostrato in fig. 3-30(b). La lunghezza di ciascuna unità delle z si può calcolare con la

$$r = \frac{pq}{bp + aq} = \frac{(2)(2/3)}{(2)(2) + (6)(2/3)} = \frac{4/3}{4 + 4} = \frac{1}{6}$$

Quindi ciascuna unità di z corrisponderà ad $1/6$ di cm. Se si suddivide la scala delle z in intervalli di 2 cm, ciascun intervallo rappresenterà allora 12 unità.

Per stabilire il valore minimo di z , scriviamo

$$z_{\min} = ax_{\min} + by_{\min} = (6)(-6) + (2)(0) = -36$$

Si può ora graduare la scala delle z , come è mostrato in fig. 3-30(b).

Controlliamo la precisione dell'abaco confrontando un valore di z calcolato con un valore ottenuto dalla fig. 3-30(b). Così, se $x = -3$ ed $y = 21$, l'equazione data fornisce

$$z = (6)(-3) + (2)(21) = -18 + 42 = 24$$

La linea tratteggiata in fig. 3-30(b) indica anch'essa, come previsto, che $z = 24$ quando $x = -3$ ed $y = 21$.

Il metodo si modifica un po' se uno dei termini ha un coefficiente negativo. Le scale si costruiscono nello stesso modo, ignorando il segno meno associato al coefficiente negativo. Tuttavia, la scala corrispondente al coefficiente negativo viene numerata nella direzione opposta. Anche la determinazione del valore minimo di z risulta modificata. Se, per esempio, $a > 0$, ma $b < 0$, allora

$$z_{\min} = ax_{\min} + by_{\max}$$

(v. il problema 3.6).

Se un'equazione contiene quattro o più variabili è ancora possibile costruire un abaco, in una maniera pressoché equivalente a quella sopra indicata. Si consideri, per esempio, l'equazione

$$w = ax + by + cz$$

Questa equazione si può scrivere come

$$w = v + cz \quad \text{dove} \quad v = ax + by$$

Quindi si costruisce dapprima un abaco per l'equazione $v = ax + by$; dopo di che un secondo abaco, per l'equazione $w = v + cz$, si sovrappone al primo.

Per leggere questo tipo di abaco, si collegano per prima cosa le scale della x e della y con una retta che interseca la scala delle v in un certo punto particolare. Questo punto viene poi collegato alla scala delle z da una seconda retta. L'intersezione di questa seconda retta con la scala delle w fornisce la soluzione desiderata. (v. il problema 3.7).

Anche un'equazione lineare che collega tre funzioni qualsiasi,

$$f_1(z) = af_2(x) + bf_3(y)$$

può venire rappresentata per mezzo di un abaco. Per fare questo, si ponga

$$w = f_1(z) \quad u = f_2(x) \quad v = f_3(y)$$

dopo di che si costruisce un abaco per l'equazione $w = au + bv$. Una volta che l'abaco è stato completato, le scale possono venire contrassegnate in termini di x , y e z , anche se erano state costruite in termini di u , v e w . (v. il problema 3.8).

Infine, è possibile rappresentare un'equazione della forma

$$z = cx^a y^b$$

ancora mediante un abaco. Ciò si ottiene prendendo i logaritmi di entrambi i membri della equazione, cioè

$$\log z = \log c + a \log x + b \log y$$

Si ponga ora $w = z/c$, cosicché

$$\log w = \log z - \log c = a \log x + b \log y$$

Un abaco relativo a $\log w$, $\log x$ e $\log y$ si può adesso costruire nel solito modo. È in genere opportuno contrassegnare le scale in termini di x , y e z anche se esse sono state costruite in termini di $\log x$, $\log y$ e $\log w$. Il procedimento è illustrato nel problema 3.9.

PROBLEMI RISOLTI

- 3.1. I seguenti dati descrivono la forza di taglio (F) in una trave in funzione della posizione (x). Riportare i dati in un diagramma cartesiano e determinare un'equazione che possa venire utilizzata per rappresentare F in funzione di x .

x , m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F , kN	-1.67	-1.00	-0.33	0.33	1.00	1.67	2.33	3.00	3.67	4.33	5.00

I dati sono diagrammati in fig. 3-31. Una linea retta può essere condotta attraverso i dati, la cui pendenza risulta 0.67 e la cui intercetta verticale vale -1.67. Con ciò

$$F = 0.67x - 1.67 \quad \text{ovvero} \quad 3F = 2x - 5$$

Si noti che F rappresenta dei kilonewton (migliaia di newton).

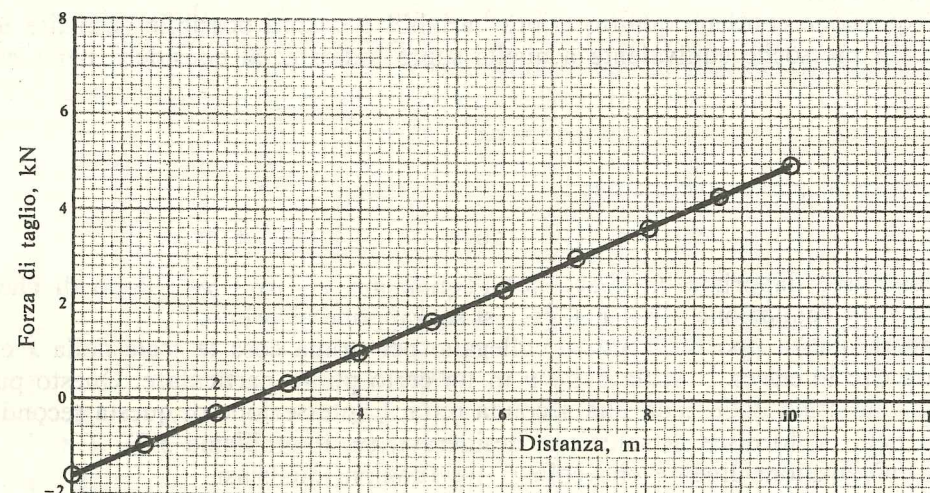


Fig. 3-31

- 3.2. I dati seguenti si riferiscono alla crescita di una cultura di batteri. La densità della popolazione batterica (d), in parti per milione, è tabulata in funzione del tempo (t). Riportare i dati su un diagramma semilogaritmico e ricavare un'equazione che possa rappresentare la densità di popolazione in funzione del tempo.

t , giorni	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
d , ppm	0.10	0.45	2.01	9.00	40.34	180.80

I primi 5 punti possono venire rappresentati su un diagramma semilogaritmico a tre cicli, come è mostrato in fig. 3-32. Una linea retta passa attraverso i dati. La pendenza di questa retta è

$$\frac{\log 2.01 - \log 0.10}{1 - 0} = \frac{0.30 - (-1.00)}{1} = 1.30$$

e la sua intercetta verticale vale $\log 0.10$. Sappiamo che l'equazione $d = ae^{bt}$ può venire rappresentata con una retta in un diagramma semilogaritmico. Si può allora scrivere

$$\ln d = \ln a + bt \quad \text{ovvero} \quad \log d = \log a + 0.434bt$$

poiché $\log x = 0.434 \ln x$. Abbiamo trovato che l'intercetta verticale è $\log a = \log 0.10$ e la pendenza

$$0.434b = 1.30 \quad \text{ovvero} \quad b = 3.0$$

Quindi $d = 0.10e^{3.0t}$.

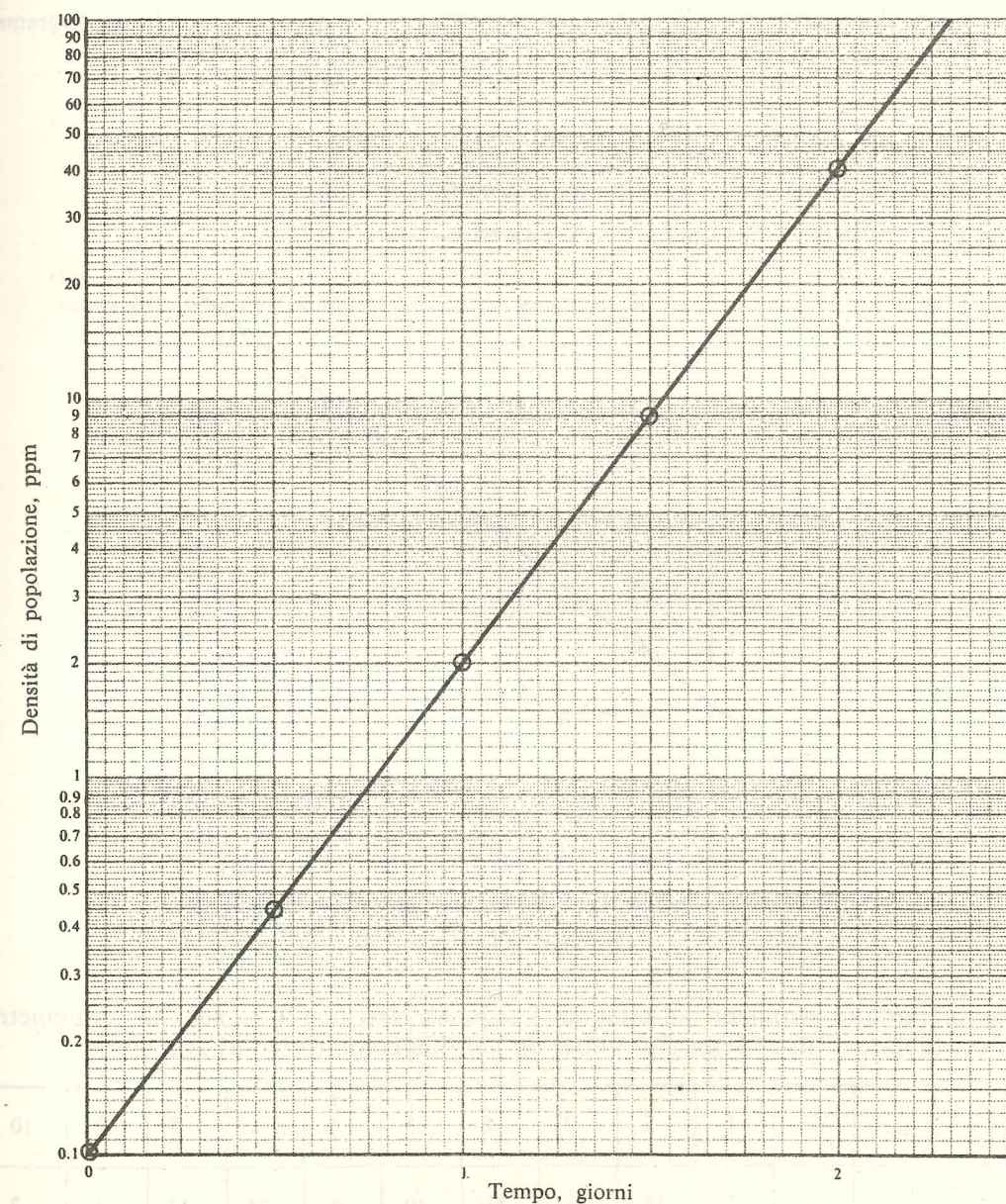


Fig. 3-32

- 3.3. Quando un fluido attraversa un tubo, la velocità del fluido è maggiore al centro del tubo rispetto alla parete del tubo. I seguenti dati descrivono la velocità del fluido (v) in funzione della distanza radiale dalla parete del tubo (r). Riportare i dati in un diagramma bilogaritmico e ricavare un'equazione che rappresenti la velocità in funzione dalla parete.

r , cm	0	2	4	6	8	10
v , cm/s	0	2.6	4.6	6.3	7.9	9.5

Gli ultimi 5 punti possono venire riportati su un diagramma bilogaritmico ad un solo ciclo, come mostrato in fig. 3-33. Una retta passa per i dati. La sua pendenza è

$$\frac{\log 9.5 - \log 1.5}{\log 10 - \log 1} = \frac{0.978 - 0.176}{1 - 0} = 0.802$$

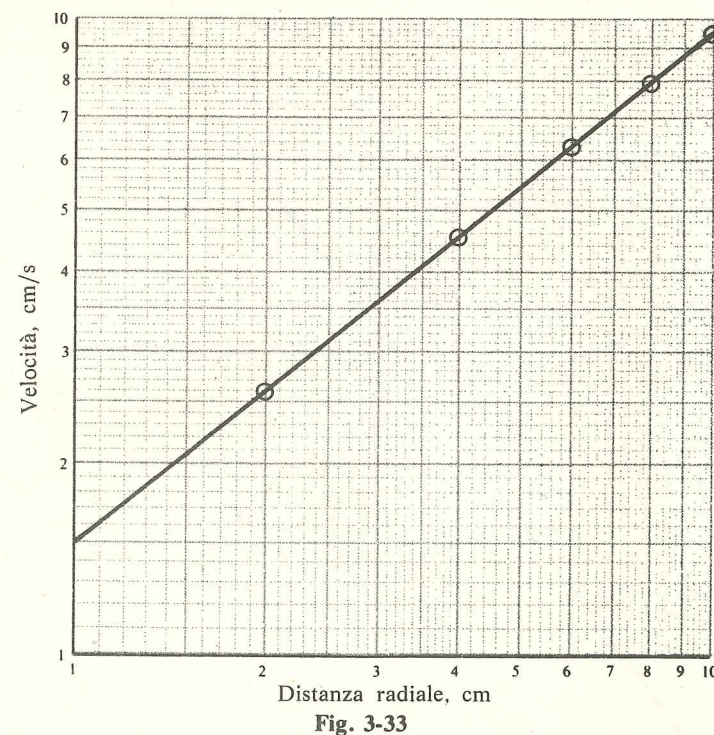
Sappiamo che l'equazione $v = ar^b$ può venire rappresentata mediante una retta in un diagramma bilogaritmico. Così

$$\log v = \log a + b \log r = \log a + 0.802 \log r$$

Si vede anche che $v = 1.5$ cm/s quando $r = 1$ cm, per cui

$$\log 1.5 = \log a + 0.802 \log 1 = \log a$$

Quindi $a = 1.5$ e l'equazione richiesta è $v = 1.5r^{0.802}$



- 3.4. Un fabbricante di strumenti ha ottenuto i seguenti dati per il numero di termometri difettosi fabbricati in ciascun giorno per un periodo complessivo di 200 giorni.

Difetti per giorno	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Numero di giorni	2	5	14	24	35	40	36	25	13	4	2

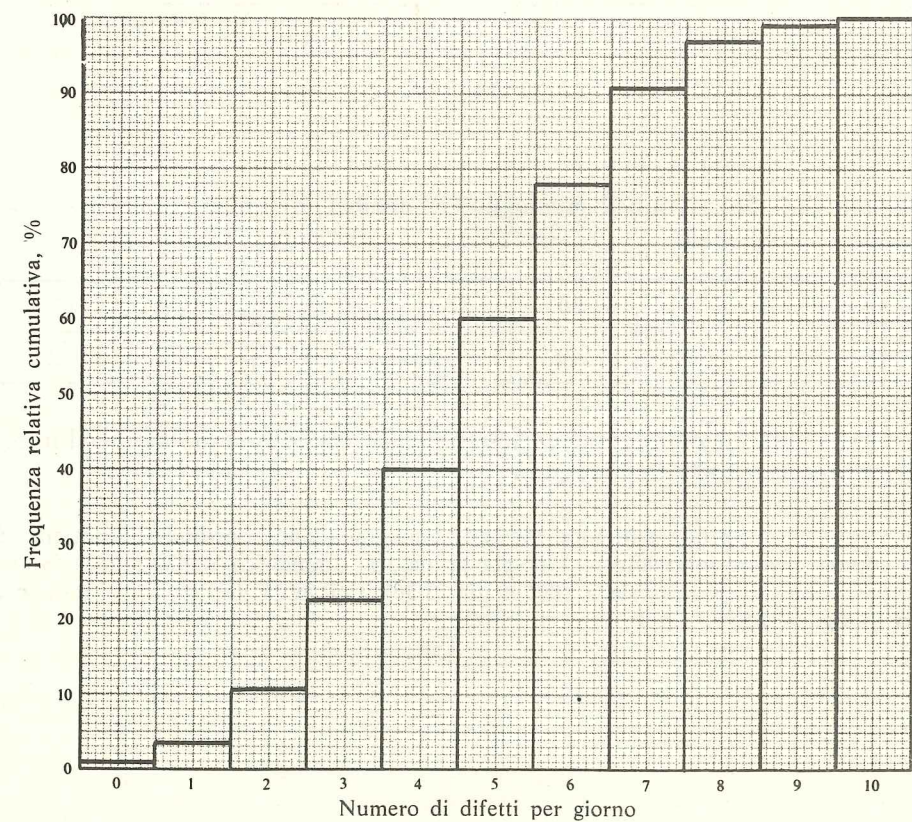
Tracciare il diagramma della distribuzione relativa cumulativa su carta millimetrata e sul diagramma di probabilità. Si può dedurre qualche informazione sulla natura della distribuzione dall'uno o dall'altro di questi diagrammi?

Per rappresentare graficamente la distribuzione cumulativa, si costruisce per prima cosa la tab. 3-8.

Tabella 3-8

Numero di difetti per giorno	Numero di giorni	Numero di giorni cumulativo	Frequenza relativa cumulativa, %
0	2	2	1.0
1	5	7	3.5
2	14	21	10.5
3	24	45	22.5
4	35	80	40.0
5	40	120	60.0
6	36	156	78.0
7	25	181	90.5
8	13	194	97.0
9	4	198	99.0
10	2	200	100.0
TOTALE	200		

La fig. 3-34 mostra un diagramma della distribuzione cumulativa in coordinate rettangolari, in forma di diagramma a colonne. Gli stessi dati vengono mostrati rappresentati su un diagramma di probabilità in fig. 3-35. Una retta può essere fatta passare attraverso tutti i dati in fig. 3-35. Si conclude, perciò, che il numero di difetti per giorno ha una distribuzione normale.



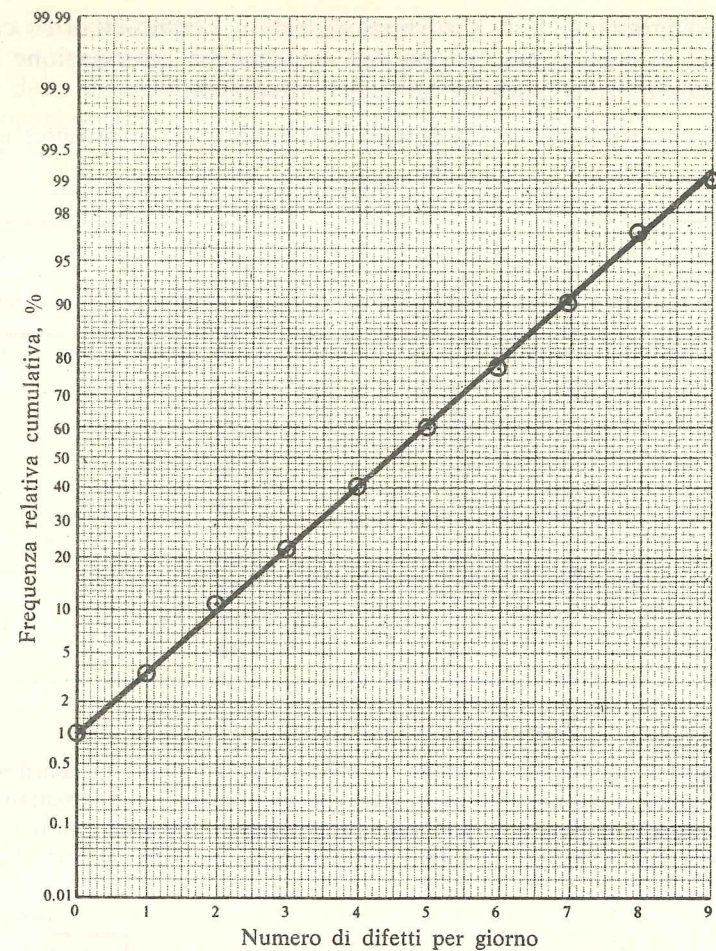


Fig. 3-35

3.5. I seguenti dati descrivono il guadagno, in decibel, di un'antenna televisiva simmetrica, fortemente direzionale.

Angolo, gradi	0	30	60	90	120	150	180
Guadagno, dB	42	40	36	31	25	19	12

Riportare i dati in coordinate cartesiane ed in coordinate polari per l'intero intervallo di direzionalità (360°) dell'antenna.

La fig. 3-36 mostra i dati rappresentati graficamente in coordinate cartesiane. E' stato possibile coprire l'intero intervallo di 360° per la natura simmetrica dell'antenna. (Si noti la simmetria rispetto alla linea verticale a 180° in fig. 3-36). Gli stessi dati sono riportati in coordinate polari in fig. 3-37.

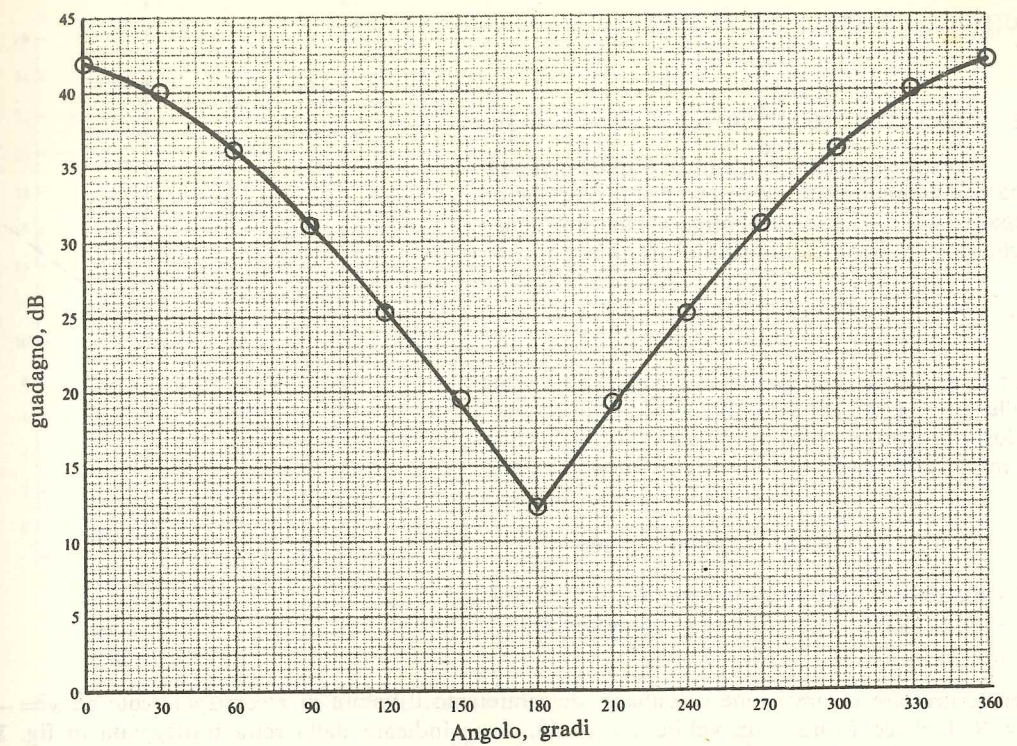


Fig. 3-36

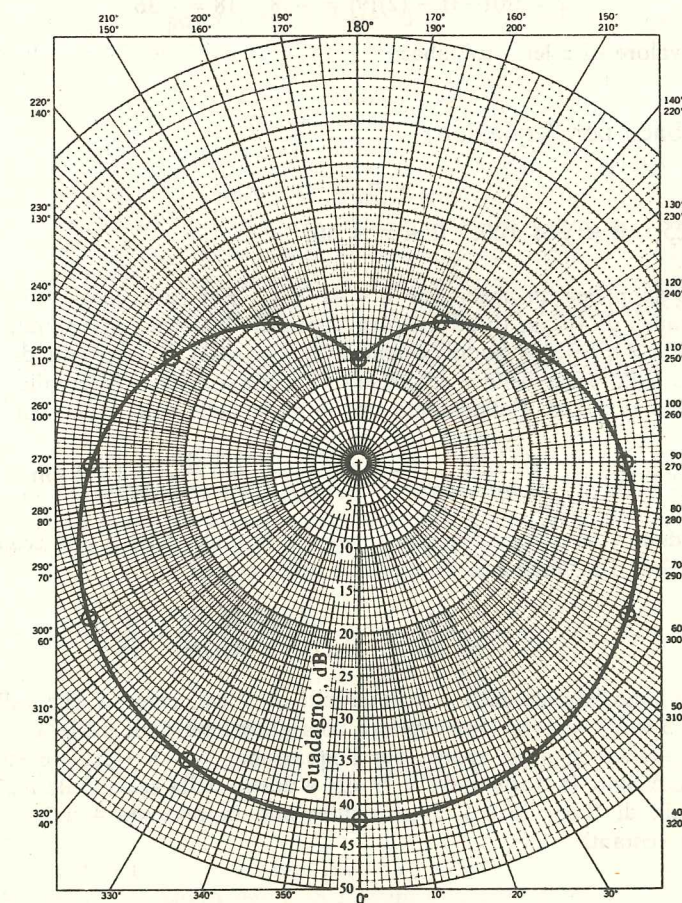


Fig. 3-37

3.6. Costruire un abaco per l'equazione

$$z = 6x - 2y$$

per l'intervallo $-6 \leq x \leq 6$ e $0 \leq y \leq 36$.

Questa equazione è identica a quella presentata nell'esempio 3.22, salvo che per il coefficiente negativo di y . Perciò la configurazione dell'abaco richiesto sarà identica a quella di fig. 3-30(b), cioè

$$p = 2 \quad q = \frac{2}{3} \quad \frac{L_1}{L_1 + L_2} = \frac{1}{2} \quad r = \frac{1}{6}$$

Tuttavia, a causa del coefficiente negativo, la scala delle y sarà graduata nella direzione opposta; cioè i valori *diminuiranno*, da $y=36$ ad $y=0$, muovendosi verso l'alto lungo la scala delle y . Inoltre, poiché

$$z_{\min} = 6x_{\min} - 2y_{\max} = (6)(-6) - (2)(36) = -108$$

la scala delle z sarà ora compresa fra $z = -108$ e $z = 36$. L'abaco nella sua forma completa è mostrato in fig. 3-38.

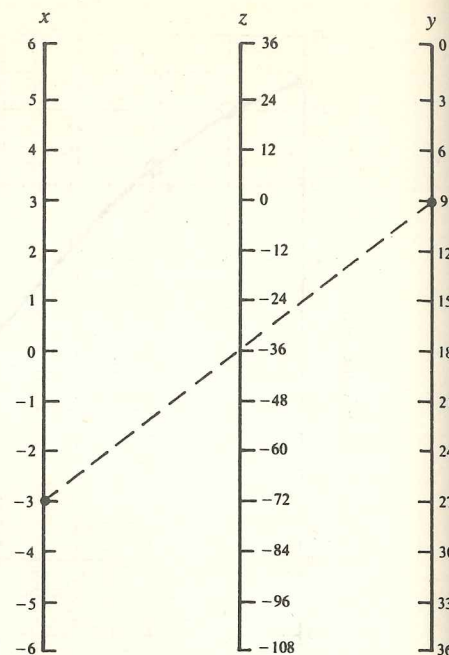


Fig. 3-38

Per controllare la precisione dell'abaco, determiniamo il valore di z corrispondente ad $x = -3$ ed $y = 9$. L'abaco fornisce un valore $z = -36$, come indicato dalla retta tratteggiata in fig. 3-38. Sostituendo i valori dati nell'equazione originaria, si ottiene

$$z = (6)(-3) - (2)(9) = -18 - 18 = -36$$

che conferma il valore di z letto sull'abaco.

3.7. Costruire un abaco per l'equazione

$$w = 4x + y + 2z$$

per $0 \leq x \leq 25$, $0 \leq y \leq 100$, $0 \leq z \leq 50$.

Si costruisce dapprima un abaco per $v = 4x + y$. Per fare questo, si costruiscono due linee verticali alla distanza di 10 cm (o ad un'altra qualsiasi distanza opportuna). Queste linee diventeranno le scale della x e della y . Suddividiamo ciascuna scala in intervalli di 1 cm, imponendo che ciascun intervallo sulla scala delle x rappresenti 2 unità e ciascun intervallo y rappresenti 8 unità. Con ciò $p = 1/2$ e $q = 1/8$. Collochiamo ora la scala delle v in modo che

$$L_1 = (L_1 + L_2) \left(\frac{bp}{bp + aq} \right) = (10) \left[\frac{(1)(1/2)}{(1)(1/2) + (4)(1/8)} \right] = 5 \text{ cm}$$

Quindi la scala delle v è collocata a mezza via fra la scala delle x e la scala delle y , come è mostrato in fig. 3-39(a). La lunghezza di ciascuna unità v sarà

$$r = \frac{pq}{bp + aq} = \frac{(1/2)(1/8)}{(1)(1/2) + (4)(1/8)} = \frac{1}{16}$$

Se allora suddividiamo la scala delle v in intervalli di 1 cm, ciascun intervallo rappresenterà 16 unità. La figura 3-39(a) mostra l'appropriata configurazione delle scale x , y e v .

Costruiamo adesso un altro abaco, per l'equazione $w = v + 2z$, e sovrapponiamolo al precedente. Collochiamo la scala delle z 9 cm a destra della scala delle v e suddividiamo la scala delle z in intervalli di 1 cm, in cui ciascun intervallo rappresenta 4 unità. Abbiamo così un nuovo gruppo di costanti:

$$a = 1 \quad b = 2 \quad L_1 + L_2 = 9 \quad p = \frac{1}{16} \quad q = \frac{1}{4}$$

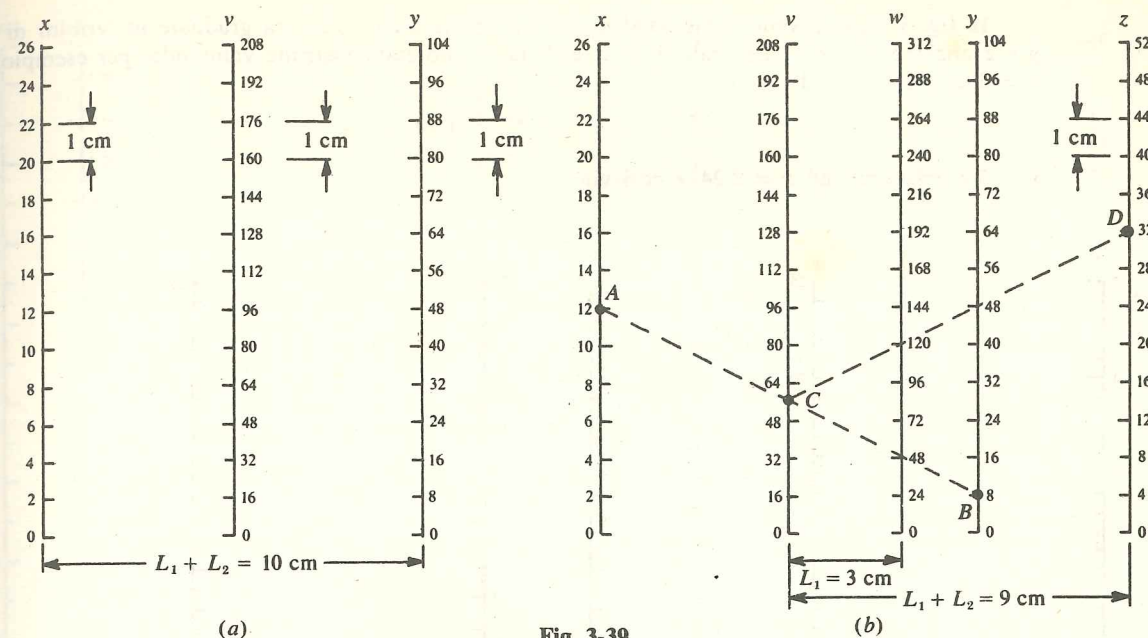


Fig. 3-39

Si può ora collocare la scala delle w , essendo

$$L_1 = (L_1 + L_2) \left(\frac{bp}{bp + aq} \right) = (9) \left[\frac{(2)(1/16)}{(2)(1/16) + (1)(1/4)} \right] = 3 \text{ cm}$$

Per cui la scala delle w è posta 3 cm a destra della scala delle v , come mostrato in fig. 3-39(b). La lunghezza di ciascuna unità w sarà

$$r = \frac{pq}{bp + aq} = \frac{(1/16)(1/4)}{(2)(1/16) + (1)(1/4)} = \frac{1}{24}$$

Se allora si suddivide la scala delle w in intervalli di 1 cm, ciascun intervallo rappresenterà 24 unità. La fig. 3-39(b) mostra l'abaco nella sua forma completa.

Per vedere come si usa questo abaco, determiniamo il valore di w corrispondente ai valori $x = 12$, $y = 8$ e $z = 32$. Per prima cosa si congiungono i punti $x = 12$ ed $y = 8$ con una retta [retta AB in fig. 3-39(b)], che interseca la scala delle v in corrispondenza di $v = 48$ (punto C). Si congiunge poi questo punto col punto $z = 32$ (retta CD). Questa seconda retta interseca la scala delle w in corrispondenza di $w = 120$. Si ha quindi $w = 120$ quando $x = 12$, $y = 8$ e $z = 32$. Si può facilmente verificare la precisione di questo risultato sostituendo i dati nell'equazione originaria, da cui si ricava

$$w = (4)(12) + 8 + (2)(32) = 120$$

In pratica non sarebbe stato qui necessario graduare la scala delle v , poiché il solo suo scopo è quello di fornire un punto terminale per la seconda retta [retta CD in fig. 3-39(b)]. Il valore numerico corrispondente al punto C non ha nessuna rilevanza.

3.8. Costruire un abaco per l'equazione

$$z = 2x^{0.5} + 3y^{0.7}$$

per $0 \leq x \leq 25$ e $0 \leq y \leq 10$.

Si ponga $u = x^{0.5}$ e $v = y^{0.7}$. Con ciò l'equazione diventa

$$z = 2u + 3v$$

per $0 \leq u \leq 5$ e $0 \leq v \leq 5$. (Si noti che $\log 5 \approx 0.7$)

La costruzione di un abaco per z in termini di u e di v è semplice e diretta; la fig. 3-40(a) mostra il risultato ottenuto.

In fig. 3-40(b) si vede lo stesso abaco, salvo che le scale sono ora graduate in termini di x , y e z anziché u , v e z . Le scale della x e della y sono state costruite valutando, per esempio, che $x = 3$ corrisponde ad

$$u = 3^{0.5} = 1.73$$

$x = 5$ corrisponde ad $u = 2.24$, e così via.

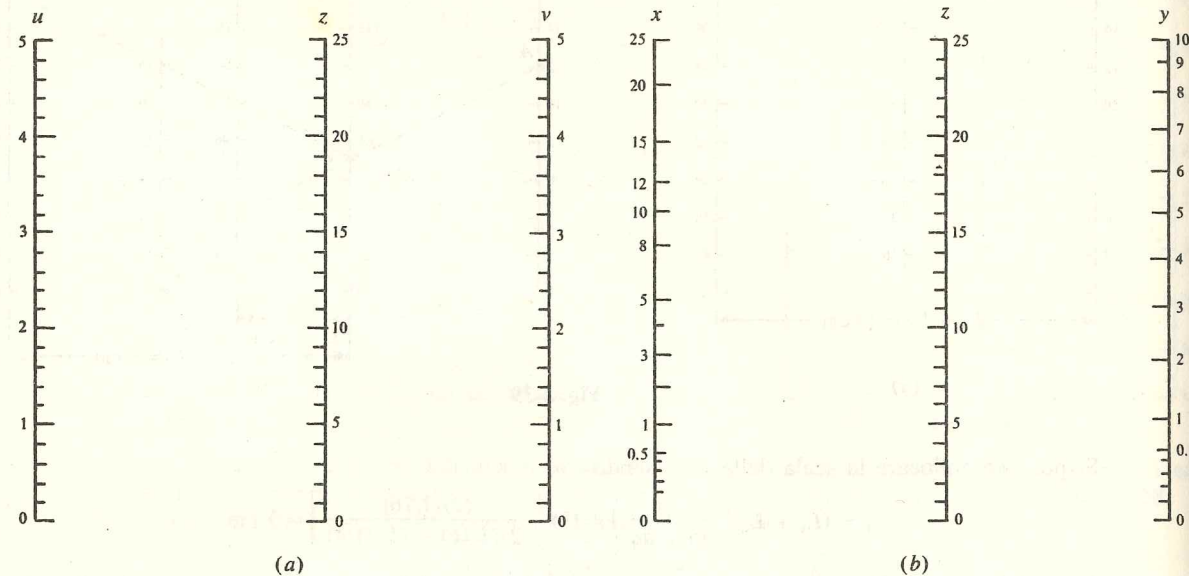


Fig. 3-40

- 3.9. Il numero di zolfo di un carbone si esprime spesso come numero di libbre di anidride solforosa (SO_2) sviluppata per milione di Btu quando il carbone viene bruciato. In termini matematici, questo può essere scritto nella forma

$$Y = \frac{20S}{E}$$

dove Y = libbre di SO_2 per milione di Btu
 S = per cento in peso di zolfo nel carbone
 E = potere calorifico del carbone, in migliaia di Btu per libbra

Costruire un abaco per questa equazione negli intervalli $0.3 \leq S \leq 10$, $8 \leq E \leq 16$.

Prendendo i logaritmi dei due membri, si ottiene

$$\log Y = \log (20S) - \log E \quad \text{ovvero} \quad w = u - v$$

dove $w = \log Y$
 $u = \log (20S)$ $0.7 \leq u \leq 2.3$
 $v = \log E$ $0.9 \leq v \leq 1.2$

La costruzione di un abaco in termini di u , v e w è immediata. (Si noti che la scala delle v verrà graduata nella direzione opposta a causa del coefficiente negativo). La fig. 3-41(a) mostra il risultato ottenuto.

È adesso semplice rigraduare le scale in termini di S , E ed Y . (Si noti, per esempio, che $S = 1$ corrisponde a

$$u = \log 20 = 1.3$$

$S = 2$ a $u = 1.6$, e così via). La fig. 3-41(b) mostra l'abaco richiesto, graduato in termini di S , E ed Y .

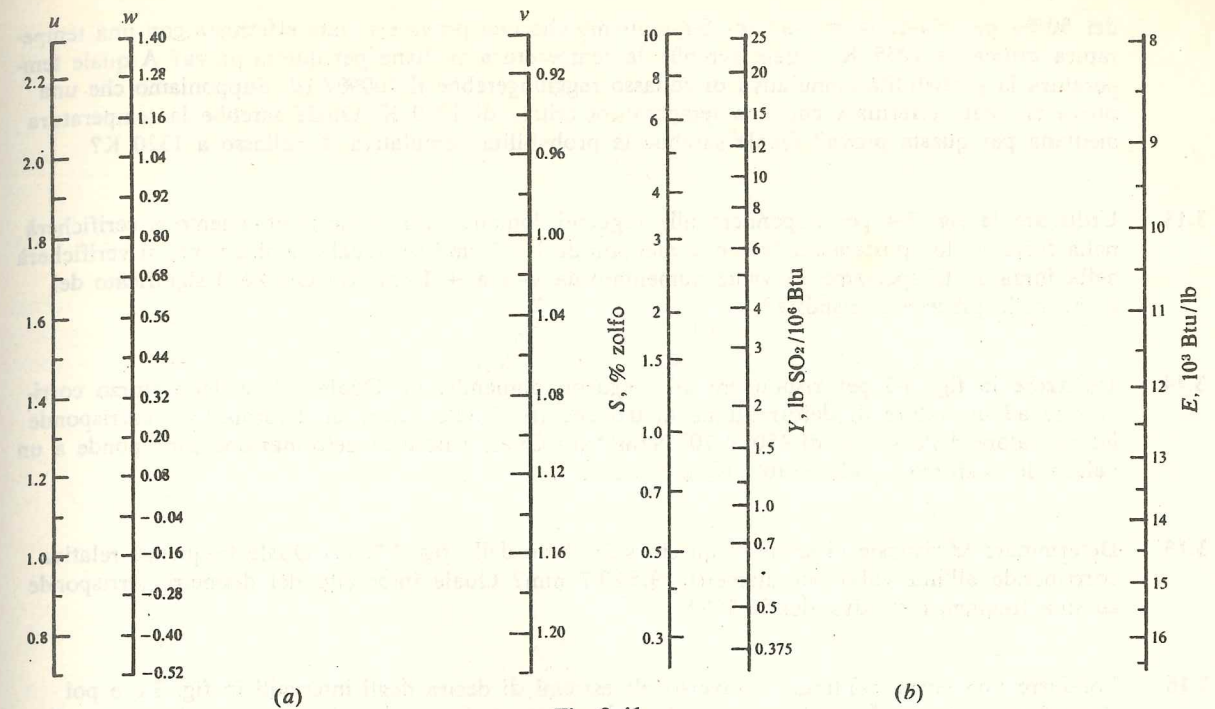


Fig. 3-41

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

Risposte alla maggior parte dei problemi vengono fornite alla fine del libro

- 3.10. La fig. 3-1 mostra l'altezza di un oggetto che cade come funzione del tempo. Utilizzare la fig. 3-1 per rispondere ai seguenti quesiti. (a) A che altezza si troverà l'oggetto dopo 2 s? (b) A che altezza si troverà dopo 5 s? (c) Quale sarà la distanza percorsa dall'oggetto cadendo fra il termine del primo ed il termine del terzo secondo? (d) Quanto tempo impiegherà l'oggetto a raggiungere un'altezza di 100 m? (e) Quanto tempo è necessario per la caduta attraverso gli ultimi 50 m? (f) Quanto tempo impiegherà l'oggetto a cadere da un'altezza di 140 m ad un'altezza di 70 m? (g) Se l'oggetto era inizialmente 150 m al di sopra del suolo, quanto tempo impiegherà a percorrere tutta la distanza di caduta fino al suolo?
- 3.11. La fig. 3-2 è un diagramma della concentrazione di una sostanza chimica in funzione del tempo. Utilizzare questa figura per rispondere ai seguenti quesiti. (a) Qual è la concentrazione dopo 4.2 s? (b) Quale sarà approssimativamente la concentrazione dopo 10 s? (c) Quanto tempo occorrerà perché la concentrazione raggiunga il valore 1.1 mol/L? (d) Quanto tempo occorrerà perché la concentrazione aumenti da 1 a 2 mol/L? (e) Qual è la differenza (errore) fra la concentrazione effettiva (misurata) ed il valore letto dalla curva all'istante corrispondente a 3s? Qual è il corrispondente errore percentuale?
- 3.12. La fig. 3-3 mostra i risultati di tre differenti prove che misurano la probabilità cumulativa di collasso di una struttura come funzione della temperatura. Ciascuna prova corrisponde ad una differente temperatura (critica) iniziale. Utilizzare la fig. 3-3 per rispondere alle seguenti domande. (a) Qual è la probabilità cumulativa di collasso per le prove A, B e C a 1295 K? (b) Qual è la temperatura di mezzo (cioè la temperatura corrispondente alla probabilità cumulativa di collasso

- del 50%) per ciascuna prova? (c) Supponiamo che una prova sia stata effettuata con una temperatura critica di 1235 K. Quale sarebbe la temperatura mediana per questa prova? A quale temperatura la probabilità cumulativa di collasso raggiungerebbe il 100%? (d) Supponiamo che una prova sia stata effettuata con una temperatura critica di 1270 K. Quale sarebbe la temperatura mediana per questa prova? Quale sarebbe la probabilità cumulativa di collasso a 1320 K?
- 3.13. Utilizzare la fig. 3-4 per rispondere alle seguenti domande. (a) Quale cambiamento si verificherà nella forza se lo spostamento viene aumentato da 1 a 3 cm? (b) Quale cambiamento si verificherà nella forza se lo spostamento viene aumentato da -1 a +1 cm? (c) Qual è il significato del segno nelle precedenti risposte?
- 3.14. Utilizzare la fig. 3-5 per rispondere alle seguenti domande. (a) Quale valore dello sforzo corrisponde ad un valore di deformazione di 0.0018? (b) Quale valore di deformazione corrisponde ad un valore dello sforzo di $450 \times 10^7 \text{ N/m}^2$? (c) Quale valore di deformazione corrisponde a un valore dello sforzo di $450 \times 10^{-5} \text{ N/m}^2$?
- 3.15. Determinare le risposte ai seguenti quesiti sulla base della fig. 3-7. (a) Quale frequenza relativa corrisponde all'intervallo dei diametri 89.5-89.7 mm? Quale intervallo dei diametri corrisponde ad una frequenza relativa del 53.5%?
- 3.16. Condurre una curva continua attraverso gli estremi di destra degli intervalli in fig. 3-8 e poi rispondere ai seguenti quesiti. (a) Quale frequenza relativa cumulativa corrisponde ad un diametro di 89.65 mm? (b) Quale diametro corrisponde ad una frequenza relativa cumulativa del 53.5% (c) Quale diametro corrisponde ad una frequenza relativa cumulativa del 10%?
- 3.17. Utilizzare la fig. 3-12 per rispondere ai seguenti quesiti. (a) Quale valore di y corrisponde ad $x = 5.5$? (b) Quale valore di y corrisponde ad $x = 9.2$? (c) Quale valore di x corrisponde ad $y = 4$? (d) Quale valore di x corrisponde ad $y = 0.4$? (e) Qual è la pendenza della retta?
- 3.18. Utilizzare la fig. 3-13 per rispondere ai seguenti quesiti. (a) Quale valore di k corrisponde a $T = 300 \text{ K}$? (b) Quale temperatura corrisponde a $k = 400 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$? (c) Quale variazione di temperatura è necessaria perché k diminuisca da $100 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$ a $10 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$? (d) Qual è la pendenza della retta?
- 3.19. Rispondere ai seguenti quesiti con l'aiuto della fig. 3-17. (a) Quale valore di y corrisponde ad $x = 4.5$? (b) Quale valore di y corrisponde ad $x = 2.5$? (c) Quale valore di x corrisponde ad $y = 0.3$? (d) Quale valore di x corrisponde ad $y = 3$? (e) Qual è la pendenza della retta?
- 3.20. Determinare le risposte alle seguenti domande facendo uso della fig. 3-21. (a) Qual è la temperatura in corrispondenza di $\theta = 45^\circ$? 135° ? 315° ? -135° ? (b) Qual è la temperatura in corrispondenza di $\theta = 15^\circ$? 80° ? 110° ? 320° ? (c) In quali posizioni angolari la temperatura sarà di 95°C ?
- 3.21. La composizione di una miscela dei componenti X, Y e Z può essere determinata dalla fig. 3-42. Qual è la composizione (a) nel punto A? (b) nel punto B? (c) nel punto C? (d) nel punto D? (e) nel punto E?
- 3.22. Utilizzare la fig. 3-23 per rispondere alle seguenti domande. (a) Quanto benzene e quanto acetone sono presenti sul confine che separa le regioni monofasica e bifasica se la concentrazione dell'acqua è del 20%? (b) Il punto seguente, corrispondente al 25% di acqua, al 20% di acetone e al 55% di benzene, cadrà nella regione monofasica o nella regione bifasica? (c) Il punto seguente, col 25% di acqua, il 65% di acetone e il 10% di benzene, cadrà nella regione monofasica o in quella bifasica? (d) Se i punti definiti in (b) e in (c) vengono congiunti con una retta, a quale composizione la retta intersecherà il confine fra le regioni monofasica e bifasica?

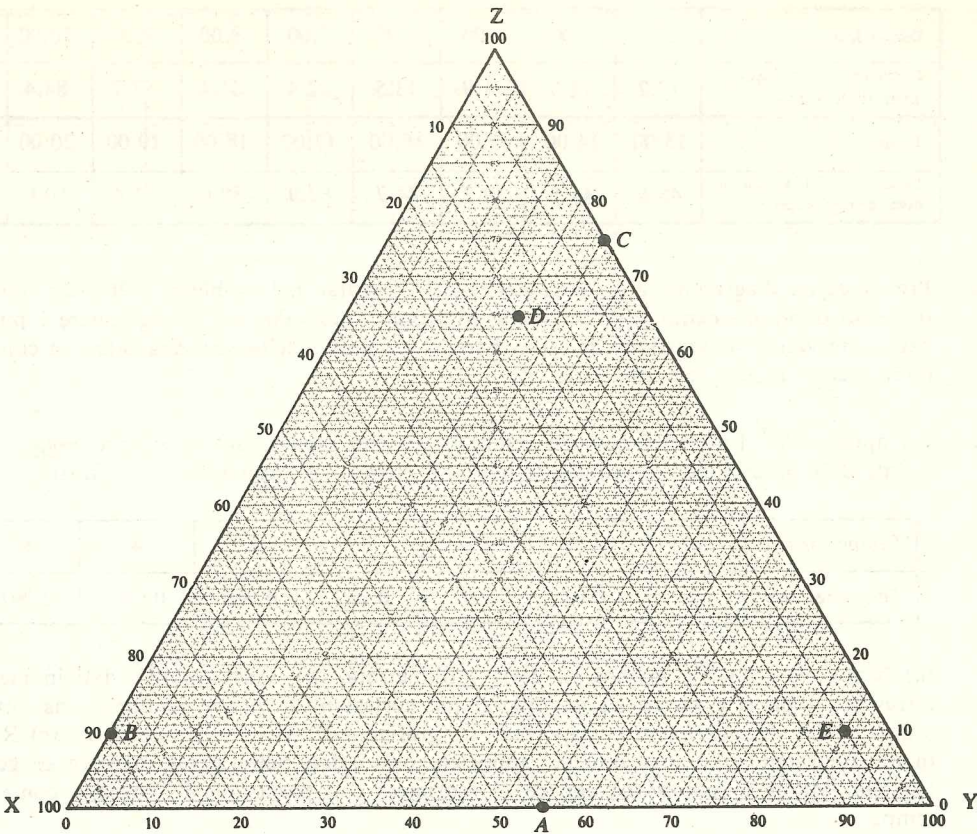


Fig. 3-42

- 3.23. In base alla fig. 3-25, quale variazione nella distribuzione cumulativa corrisponde ad un aumento del numero dei difetti (a) da 10 a 12? (b) da 2 a 4?
- 3.24. I seguenti dati descrivono la forza esercitata da una molla quando viene allontanata dalla sua posizione di equilibrio. Riportare i dati in un grafico su carta millimetrata e scrivere un'equazione che rappresenti la forza in funzione dello spostamento.

Spostamento, m	-4	-2	0	2	4
Forza, N	120	60	0	-60	-120

- 3.25. Supponiamo che la molla descritta nel problema 3.24 sia caratterizzata dai seguenti dati. Diagrammare i dati e determinare in che modo la forza può venire rappresentata matematicamente come funzione dello spostamento.

Spostamento, m	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
Forza, N	90	72	54	36	18	0	-12	-24	-36	-48	-60

- 3.26. I seguenti dati indicano il livello di un inquinante atmosferico, in parti per milione (ppm), a vari istanti nel corso di un dato periodo di 24 ore. Riportare i dati in un grafico su carta millimetrata. Stimare i livelli di inquinamento massimo e minimo ed il momento della giornata in cui essi si verificano.

Tempo h:min	0:00	2:00	4:00	6:00	7:00	8:00	9:00	10:00	11:00	12:00
Condizioni dell'atmosfera ppm d'inquinante	12.2	12.5	11.9	13.5	22.4	31.4	57.7	84.4	68.0	51.6
Tempo	13:00	14:00	15:00	16:00	17:00	18:00	19:00	20:00	22:00	24:00
Condizioni dell'atmosfera ppm d'inquinante	46.6	43.1	39.2	44.7	62.9	88.0	71.4	59.0	43.5	28.7

- 3.27. Preparare un diagramma a colonne per i dati presentati nel problema 3.26. 12.5 ppm rappresentino il livello d'inquinamento per l'intervallo di tempo 1:00-3:00, ecc. Congiungere i punti di mezzo degli intervalli con segmenti di retta. Fare il confronto della spezzata ottenuta con la curva continua ricavata nel problema 3.26.
- 3.28. Un apparecchio fotovoltaico viene improvvisamente esposto ad un intenso raggio di luce. I seguenti dati descrivono la caduta di tensione attraverso l'apparecchio in funzione del tempo.

Tempo, ms	0	0.25	0.5	1	2	4	8	16
Tensione, mV	0	0.01	0.02	0.037	0.060	0.084	0.097	0.0999

(a) Riportare i dati in grafico su carta millimetrata. (b) Trasformare i dati in maniera tale che attraverso i punti riportati su un diagramma cartesiano si possa condurre una curva di forma esponenziale. (Suggerimento: Riportare in grafico 1-10 V in funzione di t). (c) Riportare i dati in un diagramma semilogaritmico, rappresentando i dati nella stessa maniera suggerita in (b). (d) Individuare un'equazione capace di esprimere con precisione la tensione come funzione del tempo.

- 3.29. La viscosità di un materiale polimerico varia con la temperatura nel modo indicato dai dati seguenti:

Temperatura, K	280	300	320	340	360	380
Viscosità, cP	235	210	190	175	160	150

(a) Riportare i dati su un diagramma cartesiano. (b) Riportare i dati su un diagramma bilogaritmico. (c) Individuare un'equazione che rappresenti la viscosità in funzione della temperatura sul dato intervallo di temperatura.

- 3.30. I seguenti dati descrivono la dipendenza dalla temperatura di k , la costante cinetica di una reazione chimica (v. l'esempio 3.11). Determinare un valore per A , il fattore di frequenza, e per E , l'energia di attivazione molare, nell'equazione cinetica

$$k = Ae^{-E/RT}$$

dove $R = 8.32 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$.

T, K	340	360	380	400	420	440	460	480
k, s^{-1}	3	15	60	220	685	1940	5010	12 000

- 3.31. La concentrazione di una sostanza radioattiva è data dall'equazione

$$y = \frac{c_1}{c_1 - c_2} (e^{-c_2 t} - e^{-c_1 t})$$

(v. l'esempio 1.27). I seguenti dati indicano la concentrazione di questa sostanza a vari istanti.

Tempo, h	0	1	2	3	4	6	8	10	12	15	20
Concentrazione	0	0.094	0.178	0.253	0.319	0.430	0.515	0.580	0.628	0.677	0.712
Tempo	30	40	50	60	80	100	120	140	160	180	200
Concentrazione	0.692	0.624	0.548	0.475	0.354	0.262	0.194	0.144	0.107	0.079	0.059

Determinare i valori di c_1 e c_2 riportando i dati su un diagramma semilogaritmico e conducendo delle rette attraverso i pochi punti-dato iniziali e finali. (Suggerimento: se $c_1 > c_2$, l'equazione data può venire approssimata nella forma

$$y = \frac{c_1}{c_1 - c_2} e^{-c_2 t}$$

quanto t è grande. Inoltre, quando t è prossimo allo zero, si ha approssimativamente

$$y = c_1 t$$

- 3.32. Una barra metallica a 1300°C viene immersa in un bagno d'olio la cui temperatura è mantenuta a 100°C . La temperatura al centro della barra è data dall'espressione

$$T = 100 + 1200e^{-0.1t}$$

dove t è il tempo (in secondi) in cui la barra rimane nel bagno a temperatura costante. Mostrare come l'equazione possa venire rappresentata con una retta in diagramma semilogaritmico.

- 3.33. La velocità del suono in un gas è data dalla formula

$$u = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

dove u = velocità del suono, m/s
 $\gamma = 1.40$ per i gas più comuni
 R = costante universale dei gas, $8.32 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$
 T = temperatura del gas, K
 M = peso molecolare del gas, kg/mol

Preparare un diagramma bilogaritmico di u in funzione di T (a) per l'idrogeno ($M = 2 \times 10^{-3}$), (b) per l'azoto ($M = 28 \times 10^{-3}$), (c) per l'ossigeno ($M = 32 \times 10^{-3}$), (d) per l'aria ($M = 29 \times 10^{-3}$). Riportare tutte le curve sullo stesso diagramma. Considerare l'intervallo di temperatura $200 \leq T \leq 400 \text{ K}$.

- 3.34. La tab. 3-9 mostra le vendite mensili di televisori per un dato anno solare. (a) Preparare un diagramma a colonne dei dati. (b) Esprimere le cifre relative alle vendite mensili come percentuale delle vendite annuali totali. Preparare un diagramma a colonne dei dati percentuali.

Tabella 3-9

Mese	Numero di unità vendute	Mese	Numero di unità vendute
gennaio	1570	luglio	1288
febbraio	1417	agosto	1337
marzo	1886	settembre	1848
aprile	2143	ottobre	2216
maggio	1705	novembre	2058
giugno	1420	dicembre	1790

- 3.35. La tab. 3-10 mostra il prezzo mensile medio di un prodotto di un'industria manifatturiera registrato per un periodo di due anni. (a) Preparare un diagramma a colonne dei dati su carta semilogaritmica. (b) Portare in grafico i singoli punti su carta semilogaritmica, assumendo che ogni prezzo del prodotto corrisponda al centro dell'intervallo (corrispondente alla metà del mese). Congiungere i punti-dato con segmenti di retta.

Tabella 3-10

Primo anno		Secondo anno	
Mese	Prezzo del prodotto	Mese	Prezzo del prodotto
gennaio	3.60	gennaio	25.38
febbraio	4.79	febbraio	32.20
marzo	6.35	marzo	41.65
aprile	8.23	aprile	50.75
maggio	10.79	maggio	60.41
giugno	14.22	giugno	53.10
luglio	19.80	luglio	45.15
agosto	15.62	agosto	39.07
settembre	10.60	settembre	35.98
ottobre	11.27	ottobre	45.44
novembre	15.53	novembre	58.57
dicembre	19.16	dicembre	72.50

- 3.36. Un'industria chimica produce una pittura per caseggiati che si suppone contenga il 24.2% di pigmento. Diversi campioni della pittura presi a caso ed ottenuti in tempi diversi arbitrari contenevano le seguenti percentuali di pigmento:

24.22	23.80	23.97	24.30	24.37	24.14
24.87	23.95	24.47	24.32	24.41	24.43
24.19	24.25	24.38	24.40	24.27	23.95
24.05	24.22	24.04	24.62	24.41	24.06

(a) Raggruppare i dati in intervalli di punti percentuali 0.1 (cioè determinare il numero di campioni compresi fra 23.8% e 23.9%, quelli fra 23.9% e 24.0%, ecc.). (b) Preparare un diagramma a colonne per i dati così raggruppati. (c) Preparare un istogramma che mostri la percentuale di tutti i campioni (frequenza relativa) che cadono in ciascun intervallo. (d) Preparare un diagramma a colonne che mostri le frequenze relative cumulative dei dati rappresentati graficamente nella parte (c).

- 3.37. La tab. 3-11 è un compendio dei punteggi finali d'esame registrati in una classe di studenti del primo anno di ingegneria. (a) Preparare un istogramma di tali dati. (b) Preparare un diagramma a colonne che mostri le frequenze relative cumulative di tali dati. (c) Riportare la distribuzione cumulativa su un diagramma di probabilità. I punteggi d'esame risultano distribuiti normalmente?

Tabella 3-11

Intervallo di punteggi d'esame	Numero di esami	Intervallo di punteggi d'esame	Numero di esami
96-100	3	56-60	38
91-95	5	51-55	28
86-90	7	46-50	18
81-85	12	41-45	9
76-80	20	36-40	8
71-75	32	31-35	5
66-70	40	26-30	3
61-65	44	21-25	2

- 3.38. L'altezza dell'acqua in un recipiente cilindrico è collegata alla velocità di scarico dall'equazione

$$h = 0.65 \log_{10} (1 + 8v)$$

(v. l'esempio 1.28). (a) Tracciare un diagramma di h in funzione di v su carta millimetrata cartesiana, prendendo in considerazione l'intervallo $0 \leq v \leq 0.20$ m/s. (b) Se si volesse rappresentare la relazione fra h e v con una retta, quale tipo di sistema di coordinate si richiederebbe?

- 3.39. Il movimento di un dispositivo di controllo automatico è descritto dall'equazione

$$y = 1 - e^{-0.5t}$$

dove y = posizione del braccio dell'apparecchio dopo il ricevimento del segnale di comando, cm
 t = tempo intercorso dal ricevimento del segnale di comando, s

(a) Riportare in grafico y in funzione di t su carta millimetrata per l'intervallo $0 \leq t \leq 10$ s
 (b) Riportare y in funzione di t ed $1 - y$ in funzione di t in un diagramma semilogaritmico. Disegnare entrambi i diagrammi sullo stesso grafico. Quale diagramma è preferibile? (c) Riportare y in funzione di t su un diagramma polare, con t come coordinata angolare. Mostrare la direzione in cui t cresce sulla curva.

- 3.40. I seguenti dati descrivono la temperatura in varie posizioni angolari sulla circonferenza di un cilindro metallico.

Angolo, gradi	0	30	60	90	120	150	180
Temperatura, °C	50	65	76	80	76	65	50
Angolo	210	240	270	300	330	360	
Temperatura	35	24	20	24	35	50	

Riportare i dati su un diagramma in coordinate polari. Fare il confronto con la fig. 3-21 (v. l'esempio 3.16). E' possibile individuare un'equazione che rappresenti la temperatura in funzione della posizione angolare?

- 3.41. La fig. 3-26 è un diagramma funzionale per la conversione fra piedi e metri. Fare uso di questo diagramma per rispondere ai seguenti quesiti. (a) In via approssimativa, quanti metri equivalgono a 5 ft?, a 9.3 ft?, a 0.75 ft?, a 3.25 ft? (b) In via approssimativa, quanti piedi equivalgono a 0.5 m?, a 2.1 m?, a 2.25 m?, ad 1.67 m?

- 3.42. Costruire un diagramma funzionale per la conversione fra ft.lbf e J.

- 3.43. Costruire un diagramma funzionale per la conversione fra lb_f e N.

- 3.44. Costruire un diagramma funzionale per la conversione fra lb_m e kg.

- 3.45. Costruire un diagramma funzionale per la conversione fra letture di temperatura in °F ed in °C. Utilizzare la formula di conversione

$$\theta_F = 1.8\theta_C + 32$$

Prendere in considerazione l'intervallo $0 \leq \theta_F \leq 212$.

- 3.46. Costruire un diagramma funzionale per la conversione fra galloni e litri.

- 3.47. Rispondere alle seguenti domande con l'ausilio della fig. 3-28. (a) Quale valore di z corrisponde ad $x = 30$ e $y = 15$? (b) Quale valore di z corrisponde ad $x = 8$ ed $y = 12.5$? (c) Quale valore di x corrisponde ad $y = 10$ e $z = 6.3$? (d) Quale valore di y corrisponde ad $x = 35$ e $z = 8$?

- 3.48. Rispondere ai seguenti quesiti con l'aiuto di fig. 3-30(b). (a) Quale valore di z corrisponde ad $x = -4.5$ ed $y = 0$? (b) Quale valore di z corrisponde ad $x = 4$ ed $y = 4$? (c) Quale valore di y corrisponde ad $x = 0.5$ e $z = 12$? (d) Quale valore di x corrisponde ad $y = 33$ e $z = 33$?
- 3.49. Fare uso della fig. 3-39(b) per rispondere alle seguenti domande. (a) Quale valore di w corrisponde ad $x = 5$, $y = 45$ e $z = 22$? (b) Quale valore di w corrisponde ad $x = 25$, $y = 0$ e $z = 11$? (c) Quale valore di z corrisponde ad $x = 10$, $y = 70$ e $w = 200$? (d) Quale valore di x corrisponde ad $y = 16$, $z = 20$ e $w = 72$? (e) Quale valore di y corrisponde ad $x = 20$, $z = 40$ e $w = 216$?
- 3.50. Utilizzare la fig. 3-40(b) per rispondere alle seguenti domande. (a) Quale valore di z corrisponde ad $x = 2$? (b) Quale valore di z corrisponde ad $x = 0.4$ ed $y = 7.5$? (c) Quale valore di x corrisponde ad $y = 4$ e $z = 17$? (d) Quale valore di y corrisponde ad $x = 3.3$ e $z = 17.5$?
- 3.51. La fig. 3-41(b) mostra il contenuto di anidride solforosa per milione di Btu sviluppata bruciando del carbone avente un noto potere calorifico ed un contenuto noto di zolfo. Fare uso di questa figura per rispondere ai seguenti quesiti. (a) Quale sarà il contenuto di SO_2 per milione di Btu se il carbone contiene il 5% di zolfo ed il suo potere calorifico è 12.300 Btu/lb? (b) Quale contenuto di zolfo corrisponde a 2.5 lb di SO_2 per milione di Btu se il potere calorifico del carbone è 11.500 Btu/lb? (c) Se il carbone ha un contenuto di zolfo del 3.6% e 9 lb di SO_2 vengono sviluppate per milione di Btu, qual è il potere calorifico del carbone?
- 3.52. Costruire un abaco per l'equazione
- $$4z = 6x + 3y$$
- nell'intervallo $0 \leq x \leq 8$, $0 \leq y \leq 16$.
- 3.53. Costruire un abaco per l'equazione
- $$3z = 5x - 2y$$
- nell'intervallo $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 25$.
- 3.54. Costruire un abaco per l'equazione
- $$3z = 5x - 2y$$
- nell'intervallo $5 \leq x \leq 15$, $-10 \leq y \leq 15$.
- 3.55. La legge dei gas perfetti si può scrivere nella forma
- $$pV = nRT$$
- dove p = pressione, atm
 V = volume del gas, litri
 n = numero di moli del gas
 R = costante universale dei gas, 0.082 atm·litri/mol·K
 T = temperatura assoluta, K
- Costruire un abaco della legge dei gas perfetti per il caso speciale in cui $n = 1$ mol, nell'intervallo $10 \leq p \leq 100$ atm, $200 \leq T \leq 500$ K.
- 3.56. Costruire un abaco per la legge dei gas perfetti descritta nel problema 3.55, con riferimento all'intervallo $1 \leq p \leq 10$ atm, $100 \leq T \leq 600$ K, $0.1 \leq n \leq 20$ mol.
- 3.57. La formula $F = (1 + 0.01i)^n$ ci consente di calcolare il saldo di un investimento su n anni ad un tasso d'interesse annuale i (dove i è espresso in per cento). Costruire un abaco per questa formula nell'intervallo $1 \leq i \leq 15\%$, $1 \leq n \leq 20$.

CAPITOLO 4

Tecniche di riduzione ed elaborazione dei dati

Gli ingegneri si trovano spesso di fronte alla necessità di raccogliere e di interpretare dati misurati. In genere i dati grezzi non risultano particolarmente utili a ricavare le informazioni richieste; tuttavia, una grande quantità di utili informazioni si può ricavare da un gruppo di dati utilizzando alcuni semplici procedimenti di riduzione ed elaborazione dei dati.

4.1 DATI MISURATI

La precisione di un valore misurato sarà sempre limitata dalla precisione dello strumento di misura. Questa limitazione deve sempre essere tenuta presente quando si registrano o si riportano dati misurati. Il numero di cifre significative in un valore misurato si dovrebbe normalmente scegliere in modo tale che l'incertezza esista soltanto sull'ultima cifra (cioè sulla cifra meno significativa).

Esempio 4.1. La scala di un termometro a mercurio è suddivisa in intervalli di 0.1°C . La sommità della colonna di mercurio viene osservata o per allineamento con una particolare suddivisione della scala o collocandola in qualche posizione fra due suddivisioni adiacenti. Il termometro ha quindi una precisione di circa 0.05°C .

Supponiamo che, per una particolare misura, la sommità della colonna di mercurio cada, all'osservazione, fra le suddivisioni corrispondenti a 25.2°C ed a 25.3°C . Se la sommità della colonna risulta più vicina alla suddivisione 25.3°C , sarebbe più appropriato accettare 25.30°C come temperatura corretta. Similmente, accetteremmo 25.20°C come temperatura corretta se la sommità della colonna di mercurio fosse più prossima a questa suddivisione.

Si osservi che entrambe le temperature precedenti sono espresse mediante quattro cifre significative. Le prime tre cifre si possono leggere direttamente dal termometro, mentre l'ultima cifra è stimata ed il suo valore è perciò incerto.

L'incertezza associata alla lettura dello strumento di misura viene talvolta registrata a fianco del valore misurato. Così, se x rappresenta un valore misurato e δ rappresenta l'incertezza della lettura, il risultato finale dovrebbe essere registrato come $x \pm \delta$.

Esempio 4.2. L'incertezza nel termometro descritto nell'esempio 4.1 è 0.05°C . La lettura di temperatura di 25.30°C dovrebbe allora venire scritta come $25.30 \pm 0.05^\circ\text{C}$. (Questa notazione dà un limite stimato del valore assoluto dell'errore; non dice nulla sul segno dell'errore. Infatti sappiamo che in questo caso la temperatura non può superare 25.3°C). Similmente, l'altra lettura dovrebbe essere scritta come $25.20 \pm 0.05^\circ\text{C}$.

4.2 ERRORI

I dati misurati includono sempre qualche elemento di errore. Talvolta la fonte predominante di errore è uno strumento non correttamente predisposto ovvero l'impiego della formula o del procedimento errati. Questi errori sono detti errori *sistematici*.

La possibilità di introdurre errori sistematici in un gruppo di dati misurati non può mai essere completamente eliminata. La probabilità del verificarsi di tali errori può, tuttavia, venire minimizzata mediante una tecnica sperimentale accurata. In molti casi si può rivelare un errore sistematico misurando un valore noto come punto di controllo.

Esempio 4.3. Uno studente ha usato una termocoppia per misurare il punto di congelamento di una soluzione salina a varie concentrazioni del sale. Sono stati ottenuti i seguenti dati.

Concentrazione, %	5	10	15	20
Punto di congelamento, $^\circ\text{C}$	-5	-8	-12	-18

I dati sono stati poi riportati in grafico su carta millimetrata, come è mostrato dalla curva continua in fig. 4-1. Estrapolando questa curva ad una percentuale di sale uguale a zero (acqua pura), risultava indicato un punto di congelamento di -2°C . Poiché è noto che l'acqua congela a 0°C , lo studente fu portato a ritenere che la termocoppia non fosse correttamente tarata. Egli allora ritarò la termocoppia e trovò che tutte le temperature avrebbero dovuto essere maggiori di 2°C rispetto ai valori sopra presentati. La curva tratteggiata in fig. 4-1 indica i valori corretti.

I dati ottenuti con accuratezza non includono solitamente errori sistematici. Tuttavia, esiste un altro tipo di errore che è presente in *tutti* i dati misurati, almeno fino ad un certo grado: è questo l'errore *casuale*. Questi errori sono causati da fluttuazioni casuali nello strumento di misura, oppure da variazioni legate alla percezione o all'interpretazione dell'osservatore.

Sebbene gli errori casuali non possano mai venire completamente eliminati, la loro incidenza può in genere venire ridotta ad un livello tollerabile mediante un'accurata tecnica sperimentale. L'impiego di semplici procedimenti di riduzione dei dati, come la media calcolata su più punti-dato, può essere molto utile.

Esempio 4.4. La resistenza elettrica di un resistore dichiarata pari a $10\ \Omega$ è stata accuratamente misurata sei volte, ottenendo come risultato 9.83, 10.08, 10.27, 9.91, 10.03, 9.86 Ω . Calcolando la media dei sei punti-dato, si ottiene

$$R_{\text{avg}} = \frac{9.83 + 10.08 + 10.27 + 9.91 + 10.03 + 9.86}{6} = \frac{59.98}{6} \approx 10.00\ \Omega$$

Con ciò il valore medio è esattamente quello che dovrebbe essere (a meno di due decimi), nonostante la variazione nelle singole misure.

L'esempio sopra riportato illustra le tre più importanti caratteristiche degli errori casuali; cioè, che è *più verosimile che si verifichino errori piccoli anziché errori grandi*, che *errori molto grandi sono altamente improbabili*, e che *gli errori positivi e negativi sono egualmente probabili e quindi tendono ad annullarsi gli uni con gli altri*. Il successo dell'operazione di media sopra compiuta è spiegato appunto dall'ultima di queste caratteristiche.

Una volta che si è stabilito un valore medio per una serie di misure, è utile calcolare le deviazioni dei singoli valori da quello medio. Ciascuna deviazione è approssimativamente uguale all'errore casuale associato a quella misura. Le deviazioni si possono calcolare come

$$d_i = x_i - x_{\text{avg}}$$

dove d_i = deviazione dell' i -esima misura dal valore medio
 x_i = valore dell' i -esima misura
 x_{avg} = valore medio

Esempio 4.5. Calcolare le deviazioni dalla media per i dati presentati nell'esempio 4.4 ed individuare la deviazione più grande (in valore assoluto).

Il valore medio ottenuto nell'esempio 4.4 era $10.00\ \Omega$, con una precisione di due decimi. Perciò $x_{\text{avg}} = 10.00\ \Omega$. Le singole deviazioni, calcolate con la formula sopra indicata, sono

$$\begin{aligned} 9.83 - 10.00 &= -0.17\ \Omega \\ 10.08 - 10.00 &= 0.08 \\ 10.27 - 10.00 &= 0.27 \\ 9.91 - 10.00 &= -0.09 \\ 10.03 - 10.00 &= 0.03 \\ 9.86 - 10.00 &= -0.14 \end{aligned}$$

La massima deviazione si ha nella terza misura (cioè $d_3 = 0.27\ \Omega$), il che sta ad indicare che la terza misura è probabilmente affetta dal massimo errore.

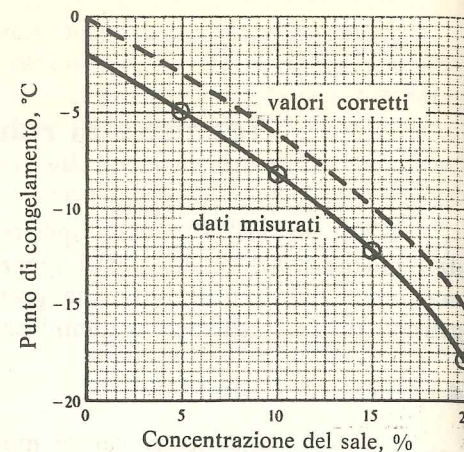


Fig. 4-1

In molti casi si conoscerà in anticipo un valore preciso per la quantità che viene misurata. Questo valore può essere il risultato di un grande numero di precedenti misure, oppure può essere il risultato di un calcolo teorico di previsione. In entrambi i casi, si può interpretare questo valore come « valore accettato vero » o « valore esatto ».

Se un valore accettato come esatto è disponibile, l'errore assoluto in un valore misurato è definito come

$$e_i = x_i - x$$

dove e_i = errore assoluto nella misura i -esima

x_i = i -esimo valore misurato

x = valore accettato come esatto

Se non si conosce un valore esatto, la media dei valori misurati, x_{avg} , viene allora generalmente utilizzata in sua vece.

Esempio 4.6. Uno studente ha ottenuto diverse misure della densità dell'acciaio, riportate qui di seguito. Determinare l'errore assoluto associato a ciascun valore misurato, se il valore accettato come esatto è $7.84 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$.

Misura n.	1	2	3	4	5
Densità, $10^3\ \text{kg/m}^3$	7.86	7.84	7.83	7.84	7.87

La media dei valori misurati è $7.85 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$. Comunque gli errori assoluti sono basati sul valore supposto esatto piuttosto che sul valore medio, per cui gli errori assoluti, nelle unità di $10^3\ \text{kg/m}^3$, sono i seguenti:

$$\begin{aligned} 7.86 - 7.84 &= 0.02 \\ 7.84 - 7.84 &= 0 \\ 7.83 - 7.84 &= -0.01 \\ 7.84 - 7.84 &= 0 \\ 7.87 - 7.84 &= 0.03 \end{aligned}$$

L'errore relativo è definito come il rapporto fra l'errore assoluto ed il valore accettato come esatto, cioè

$$r_i = \frac{e_i}{x} = \frac{x_i - x}{x}$$

dove r_i è l'errore relativo nella misura i -esima. L'errore relativo viene spesso preferito, come elemento di valutazione dei dati, all'errore assoluto in quanto permette di esprimere l'errore in relazione alla quantità che viene misurata. Moltiplicato per 100, l'errore relativo diventa l'errore percentuale.

Esempio 4.7. Per i valori misurati presentati nell'esempio 4.6 (dove $x = 7.84 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$) gli errori relativi ed i corrispondenti errori percentuali sono calcolati nella tab. 4-1. Notare che gli errori relativo e percentuale sono adimensionali.

Tabella 4-1

Misura n.	Densità, $10^3\ \text{kg/m}^3$	Errore relativo	Errore percentuale, %
1	7.86	$(7.86 - 7.84)/7.84 = 0.0026$	0.26
2	7.84	$(7.84 - 7.84)/7.84 = 0$	0
3	7.83	$(7.83 - 7.84)/7.84 = -0.0013$	-0.13
4	7.84	$(7.84 - 7.84)/7.84 = 0$	0
5	7.87	$(7.87 - 7.84)/7.84 = 0.0038$	0.38

4.3 LA MEDIA ARITMETICA

Il calcolo di una media aritmetica semplice è stato già effettuato nell'esempio 4.4. Per n punti-dato $x_1, x_2, \dots, x_n$, si ha

$$x_{\text{avg}} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Questa quantità è una media « semplice », poiché ciascun valore misurato vi contribuisce in maniera eguale, cioè ciascun valore misurato ha lo stesso « peso ».

In molti casi, può risultare opportuno porre in maggior rilievo certi punti-dato rispetto agli altri quando si calcola una media. Ciò può essere realizzato mediante la formula

$$x_{\text{avg}} = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_n x_n$$

dove $f_1, f_2, \dots, f_n$ sono *fattori di pesatura*, o semplicemente *i pesi*, che devono soddisfare alle condizioni $f_i \geq 0$ per $i = 1, 2, \dots, n$ e

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n = 1$$

Quanto maggiore è il suo peso, tanto maggiore sarà l'influenza di un punto-dato sulla media. La media aritmetica semplice si ottiene nel caso speciale in cui

$$f_1 = f_2 = \dots = f_n = \frac{1}{n}$$

Esempio 4.8. I voti di uno studente in quattro esami sono 60, 75, 65 e 90. Valutare la sua media semestrale complessiva se il primo esame contribuisce per il 20% alla media globale, il secondo ed il terzo vi contribuiscono per il 25% ciascuno e l'ultimo esame vi contribuisce per il 30%.

I punti-dato per questo problema sono $x_1 = 60$, $x_2 = 75$, $x_3 = 65$, ed $x_4 = 90$. I pesi corrispondenti (che devono essere espressi in termini frazionari, e non percentuali) sono $f_1 = 0.20$, $f_2 = 0.25$, $f_3 = 0.25$, ed $f_4 = 0.30$.

Con ciò $x_{\text{avg}} = (0.20)(60) + (0.25)(75) + (0.25)(65) + (0.30)(90) = 74$

È interessante osservare che la media complessiva conseguita dallo studente sarebbe stata soltanto di 72.5 se si fosse calcolata una media aritmetica semplice.

4.4 CARATTERISTICHE STATISTICHE DEI DATI

Vi sono parecchie differenti quantità statistiche che possono venire usate per caratterizzare un gruppo di dati. Alcune di queste, come la media, la mediana e la moda, sono punti « centrali » rappresentativi intorno ai quali i dati tendono ad essere raggruppati; altre, come la varianza e la deviazione standard, caratterizzano il grado di *dispersione* nei dati.

Media

Il *valore medio*, $\bar{x}$, di un gruppo di dati ha la proprietà per cui

$$n\bar{x} = x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad \text{ovvero} \quad \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = x_{\text{avg}}$$

Cosicché il valore medio di un gruppo di dati è uguale alla media aritmetica semplice.

Se si hanno diversi gruppi di dati, in cui il gruppo i -esimo contiene n_i valori ed ha un valore medio $\bar{x}_i$, si può definire una media complessiva come

$$\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2 + \dots + n_k \bar{x}_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}$$

Questo valore è semplicemente una media aritmetica pesata, in cui ciascun peso rappresenta la frazione dei valori totali dati nel corrispondente gruppo di dati.

Esempio 4.9. La tab. 4-2 riassume tre gruppi di prove eseguite per determinare la forza in grado di provocare il collasso di un componente di una struttura in acciaio. Determinare il valore di collasso medio complessivo.

Tabella 4-2

Gruppo di prove	Ente che ha effettuato le prove	Numero di misure	Valore medio della forza di collasso, N
1	società di fabbricazione dell'acciaio	30	4783
2	università	12	4620
3	laboratorio di prova privato	18	4705

$$\bar{x} = \frac{(30)(4783) + (12)(4620) + (18)(4705)}{30 + 12 + 18} = 4727 \text{ N}$$

Nel par. 4.5 incontreremo un tipo di situazione differente, in cui la media è ancora uguale ad una media aritmetica pesata.

Mediana

Se i valori in un gruppo di dati sono sistemati in ordine crescente, la *mediana* sarà il valore centrale.

Esempio 4.10. Un motore d'automobile richiede un getto di colata le cui dimensioni ed il cui peso devono venire accuratamente controllati. I pesi (le masse) di nove campioni, presi a caso dalla linea di produzione sono 11.33, 11.27, 11.38, 11.30, 11.29, 11.30, 11.34, 11.31, e 11.32 kg. Determinare la mediana dei dati.

Si incomincia col disporre i valori in ordine crescente. Con ciò, il gruppo di dati diventa

11.27, 11.29, 11.30, 11.30, 11.31, 11.32, 11.33, 11.34, 11.38

Il quinto valore, 11.31 kg, è la mediana, in quanto tale valore è circondato da quattro valori superiori e da quattro inferiori.

La mediana coinciderà sempre con uno dei valori misurati se il numero totale dei valori è dispari, come nel precedente esempio. Se il numero totale dei valori è pari, invece, la mediana cadrà fra due valori misurati; in tal caso viene presa come media aritmetica di questi due valori intermedi. Secondo questa convenzione, ogni gruppo di dati avrà un'unica media ed un'unica mediana.

Moda

La *moda* di un gruppo di dati è il valore che si presenta con la maggiore frequenza.

Esempio 4.11. Determinare la moda dei dati presentati nell'esempio 4.10.

In questo gruppo di dati il valore 11.30 compare due volte, mentre tutti gli altri valori compaiono una volta soltanto. Quindi la moda è 11.30 kg.

Alcuni gruppi di dati possono avere più di una moda.

Esempio 4.12. Determinare la moda dei seguenti dati: 5, 2, 4, 12, 10, 12, 5, 8.

In questo gruppo di dati il valore 11.30 compare due volte, mentre tutti gli altri valori compaiono una volta soltanto. Quindi i valori 5 e 12 rappresentano ciascuno una moda.

Un gruppo di dati che ha soltanto una moda, come nell'esempio 4.11, si dice *unimodale*. Il gruppo di dati presentato nell'esempio 4.12 è *bimodale*, poiché contiene due valori differenti per la moda. In generale, un gruppo di dati che contiene più di una moda si dice *multimodale*.

La media, la mediana e la moda forniscono tutte utili informazioni su un gruppo di dati.

Esempio 4.13. Una classe di studenti di ingegneria del primo anno contiene 20 studenti. Alla fine del trimestre gli studenti hanno conseguito i seguenti voti finali:

15	30	55	70	80
20	30	60	75	80
25	30	65	75	85
25	40	70	75	90

La media della classe (la media) è 54,8, anche se metà degli studenti ha voti superiori a 62,5 (la mediana). La distribuzione dei voti è bimodale, con un gruppo di voti raccolti intorno a 30 ed un altro gruppo intorno a 75.

Varianza

La *varianza* di un gruppo di dati indica l'entità della dispersione dei singoli valori dei dati intorno alla media. Per il gruppo $x_1, x_2, \dots, x_n$, la varianza si definisce come

$$v = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

dove $\bar{x}$ è la media del gruppo. Poiché ciascun termine al numeratore è non negativo ed $n > 0$, si vede che la varianza è sempre non negativa, cioè $v \geq 0$. Inoltre, v sarà uguale a zero soltanto se tutti i valori dei dati sono uguali, cioè per

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \bar{x}$$

Quanto maggiore è la variazione rispetto alla media, tanto maggiore sarà il valore di v .

La formula precedente può essere anche scritta nel modo seguente:

$$v = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2$$

(problema 4.11). Questa formula è quella preferita per i calcoli, poiché è meno suscettibile ad errori numerici della formula precedente. In entrambi i casi il valore di $\bar{x}$ deve essere espresso il più accuratamente possibile.

Esempio 4.14. Calcolare la varianza per i dati dell'esempio 4.10.

La media è

$$\bar{x} = \frac{11.33 + 11.27 + 11.38 + 11.30 + 11.29 + 11.30 + 11.34 + 11.31 + 11.32}{9} = 11.315556 \text{ kg}$$

e quindi

$$v = \frac{(11.33)^2 + (11.27)^2 + (11.38)^2 + (11.30)^2 + (11.29)^2 + (11.30)^2 + (11.34)^2 + (11.31)^2 + (11.32)^2}{9} - (11.315556)^2 = 0.0009035 \text{ kg}^2$$

per cui la varianza ha un valore di circa 10^{-3} kg^2 .

Il valore calcolato della varianza sarebbe stato considerevolmente errato se avessimo usato il valore arrotondato $\bar{x} = 11.32 \text{ kg}$ (v. il problema 4.12).

Deviazione standard

La *deviazione standard*, s , è definita come la radice quadrata della varianza, cioè

$$s = \sqrt{v} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2}$$

Essa fornisce praticamente le stesse informazioni sui dati della varianza; essa indica, cioè, il grado di dispersione dei valori intorno alla media. Tuttavia, il suo valore assoluto approssima più da vicino i valori assoluti delle singole deviazioni. Inoltre essa ha le stesse unità dei singoli punti-dato.

Esempio 4.15. Calcolare la deviazione standard per i dati presentati nell'esempio 4.10.

Dall'esempio 4.14, la varianza è $v = 0.0009035 \text{ kg}^2$. Quindi

$$s = \sqrt{0.0009035} = 0.03006 \text{ kg} \approx 0.03 \text{ kg}$$

Questo valore è rappresentativo delle singole deviazioni dal valor medio, che vanno da 0 a 0.06 kg in valore assoluto.

Alcuni autori dividono per $n - 1$ anziché per n quando calcolano la varianza e la deviazione standard. E ciò è particolarmente frequente nei testi di statistica. Non ci soffermeremo ulteriormente su questo punto in questo libro. Si può tuttavia accennare di passaggio che se n è sufficientemente grande vi sarà una differenza molto piccola fra i valori ottenuti usando n od $n - 1$.

4.5 DATI RAGGRUPPATI

E' spesso opportuno presentare un gruppo di dati mediante il numero degli eventi che si presentano in diversi intervalli adiacenti. Questi numeri esprimono la *distribuzione* dei dati.

Esempio 4.16. Durante il mese di gennaio, le temperature medie giornaliere a Fairweather, in Florida, erano quelle mostrate nella tab. 4-3.

Tabella 4-3

Giorno del mese	Temperatura, °C	Giorno del mese	Temperatura, °C	Giorno del mese	Temperatura, °C
1	17	11	18	21	23
2	15	12	20	22	24
3	11	13	22	23	21
4	13	14	23	24	18
5	8	15	21	25	19
6	9	16	26	26	20
7	6	17	30	27	17
8	10	18	28	28	15
9	12	19	27	29	17
10	16	20	30	30	14
				31	12

Trovare la distribuzione dei dati su intervalli di 5 °C.

Il raggruppamento dei dati richiesto è il seguente:

Intervallo	Numero dei giorni
6-10 °C	4
11-15	7
16-20	9
21-25	6
26-30	5
TOTALE	31

Quando i dati sono sistemati in questo modo, è chiaro che la maggior parte delle temperature medie giornaliere cade fra 11 e 25 °C. Inoltre prevalgono temperature comprese fra 16 e 20 °C.

In molte situazioni, può essere preferibile presentare i dati raggruppati in termini di *frequenza relativa* anziché di numero di punti-dato (v. l'esempio 3.7). Si ha

$$f_i = \frac{n_i}{n}$$

dove f_i = frequenza relativa dell'intervallo i -esimo, $i = 1, 2, \dots, k$
 n_i = numero di punti-dato nell'intervallo i -esimo
 n = numero totale di punti-dato

È facile vedere che $f_i \geq 0$ e che $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$. Così le frequenze relative possono essere interpretate come *pesi* (per gli intervalli, e non per i singoli punti-dato come nel par. 4.3).

Esempio 4.17. Le frequenze relative dei dati raggruppati ottenuti nell'esempio 4.16 sono calcolate nella tab. 4-4.

Tabella 4-4

Intervallo	Frequenza relativa (frazione)	Frequenza relativa (percentuale)
6-10 °C	4/31 = 0.129	12.9%
11-15	7/31 = 0.226	22.6
16-20	9/31 = 0.290	29.0
21-25	6/31 = 0.194	19.4
26-30	5/31 = 0.161	16.1
TOTALI	1.000	100.0%

Così circa il 13% delle temperature medie giornaliere cade nell'intervallo 6-10 °C, il 23% cade nell'intervallo 11-15 °C e così via. L'intervallo con la maggiore frequenza è evidentemente quello 16-20 °C.

4.6 DISTRIBUZIONI DI FREQUENZA

Una serie di dati raggruppati viene spesso indicata come una *distribuzione di frequenza*, poiché essa indica la frequenza con cui i dati cadono in ciascun intervallo che la costituisce. Le distribuzioni di frequenza possono venire rappresentate mediante istogrammi (v. il par. 3.2) e, in alcuni casi, anche per via analitica. Caratteristiche importanti della distribuzione, quali la simmetria, la posizione delle mode ed il grado di dispersione, si possono desumere facilmente dall'istogramma.

Esempio 4.18. Un'altra e più estesa serie di dati che descrivono la temperatura media giornaliera a Fairweather, in Florida, durante il mese di gennaio, è stata ottenuta dall'Ufficio Meteorologico degli Stati Uniti. La distribuzione di frequenza, in termini di intervalli di temperatura di 2 °C, è la seguente

Intervallo, °C	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20	20-22
Frequenza relativa, %	0.6	3.8	9.0	12.2	13.5	12.8	11.7	10.2
Intervallo	22-24	24-26	26-28	28-30	30-32	32-34	34-36	
Frequenza relativa	8.3	6.4	4.5	3.2	1.9	1.3	0.6	

Un istogramma dei dati è mostrato in fig. 4-2. Da questa figura risulta chiaro che la distribuzione è unimodale ed asimmetrica rispetto alla moda, a favore delle temperature più alte (questo tipo di asimmetria è detto *asimmetria positiva*). La moda stessa sembra essere collocata fra 14 e 16 °C. I dati sono dispersi su un intervallo di 30 °C, che va da 6 °C a 36 °C.

Una distribuzione di frequenza rappresenterà spesso un qualche processo consistente di un numero di eventi che si verificano a caso. Se la serie dei dati è sufficientemente grande da essere veramente rappresentativa del processo, ciascuna delle frequenze può venire interpretata come la *probabilità* che un evento casuale cada nel corrispondente intervallo.

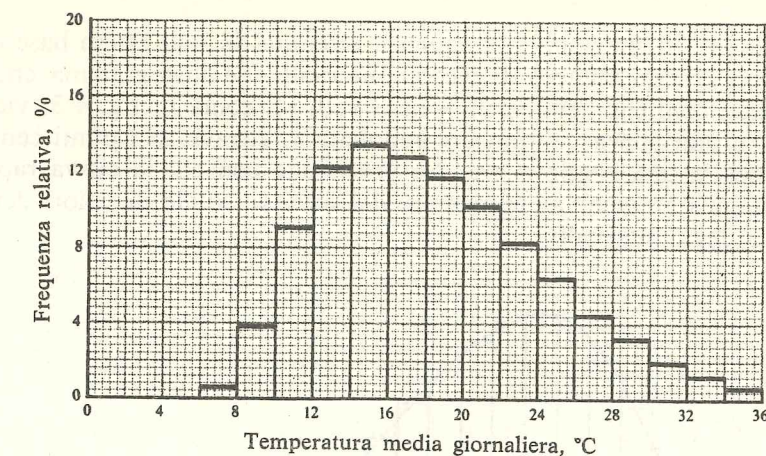


Fig. 4-2

Esempio 4.19. Qual è la probabilità che per un giorno di gennaio a Fairweather, in Florida, la temperatura media sia compresa fra 16 e 18 °C? (Si vedano le frequenze relative date nell'esempio 4.18).

Supponendo che il gruppo dei dati utilizzato per calcolare le frequenze relative sia sufficientemente grande da essere veramente rappresentativo dell'andamento della temperatura di Fairweather durante il mese di gennaio, vi è una probabilità del 12.8% che la temperatura media giornaliera sia compresa fra 16 e 18 °C, poiché questo intervallo ha una frequenza relativa appunto del 12.8% (cioè, il 12.8% delle temperature registrate cade in questo intervallo).

Il valore medio di una distribuzione di frequenza è uguale alla media aritmetica pesata, nella quale le frequenze relative (frazionarie) servono come pesi ed i punti centrali dei corrispondenti intervalli sono i singoli valori dei dati. In forma matematica, ciò può essere espresso come

$$\bar{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_kx_k$$

Esempio 4.20. Determinare il valore medio per la distribuzione di frequenza presentata nell'esempio 4.18. Il valore desiderato si ottiene facilmente utilizzando la formula precedente. Così,

$$\bar{x} = (0.006)(7) + (0.038)(9) + (0.09)(11) + (0.122)(13) + \dots + (0.013)(33) + (0.006)(35) = 18.406 \approx 18.4 \text{ °C}$$

Un valore più preciso si sarebbe ottenuto se avessimo potuto calcolare la media aritmetica semplice dei dati originari (non raggruppati). Ma, come spesso accade, i dati originari non erano disponibili.

La mediana di una distribuzione di frequenza si può meglio ricavare dalla corrispondente distribuzione cumulativa. Si vedrà come si ottiene questo valore nel par. 4.7.

La varianza si può determinare con l'espressione

$$v = (f_1x_1^2 + f_2x_2^2 + \dots + f_kx_k^2) - \bar{x}^2$$

dove f_i rappresenta la frequenza relativa (frazionaria) dell'intervallo i -esimo, x_i rappresenta il punto centrale di quell'intervallo, ed $\bar{x}$ rappresenta il valore medio della distribuzione di frequenza. La deviazione standard è definita come la radice quadrata della varianza, $s = \sqrt{v}$, come in precedenza.

Esempio 4.21. Determinare la varianza e la deviazione standard per la distribuzione di frequenza presentata nell'esempio 4.18.

La varianza si può ottenere dalla formula precedente utilizzando il valore di $\bar{x}$ determinato nell'esempio 4.20, cioè $\bar{x} = 18.406 \text{ °C}$. Con ciò,

$$v = [(0.006)(7)^2 + (0.038)(9)^2 + (0.09)(11)^2 + (0.122)(13)^2 + \dots + (0.013)(33)^2 + (0.006)(35)^2] - (18.406)^2 = 34.075164 \approx 34.1 \text{ °C}^2$$

La deviazione standard si può ora ottenere e risulta

$$s = \sqrt{34.075164} = 5.837394 \approx 5.84 \text{ °C}$$

In molti casi, una distribuzione di frequenza ottenuta da una estesa base di dati sarà espressa mediante un grande numero di piccoli intervalli. Se l'istogramma che ne risulta è « spianato » (cioè non contiene né « picchi » né « valli »), come in fig. 4-3, viene del tutto naturale di condurre una curva continua, « addolcita », attraverso i punti centrali degli intervalli. La fig. 4-3 mostra una simile curva. La precisione con cui la curva rappresenta la distribuzione di frequenza crescerà all'aumentare del numero totale di valori dei dati e al diminuire dell'ampiezza degli intervalli.

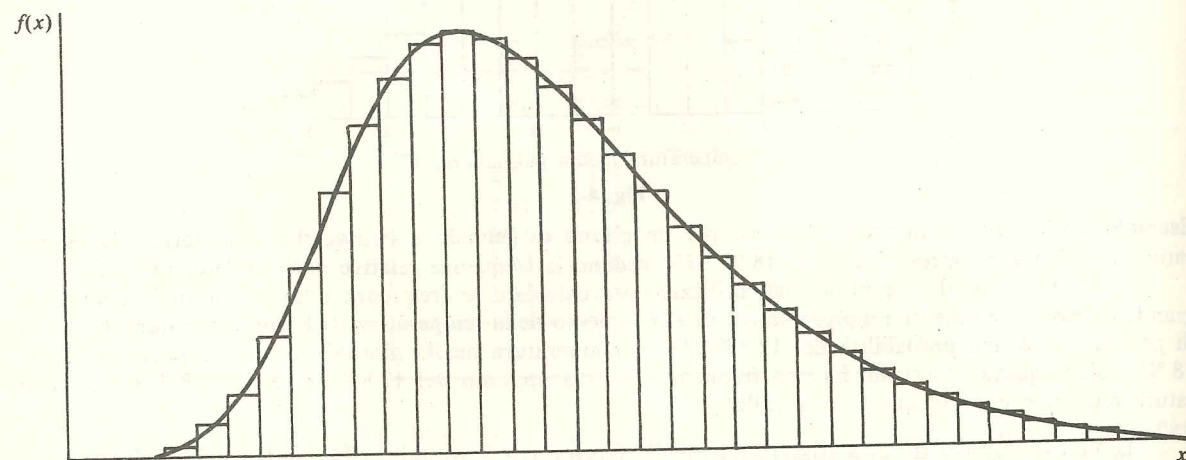


Fig. 4-3

Di solito, quando una distribuzione di frequenza è rappresentata da una curva continua, i valori delle ordinate sono aggiustati in modo che l'area totale sottesa dalla curva abbia un valore unitario, cioè la scala delle ordinate è realizzata in modo tale che

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

La funzione di frequenza $f(x)$, che deve anche soddisfare alla condizione $f(x) \geq 0$, è detta allora *funzione di densità di probabilità*. Se la distribuzione di frequenza descrive il verificarsi di eventi in un particolare tipo di processo casuale, la funzione $f(x)$ è detta *funzione di densità di probabilità teorica*. Una simile funzione di densità verrà esaminata nel par. 4.8.

4.7 DISTRIBUZIONI CUMULATIVE

È spesso più utile presentare una serie di dati raggruppati mediante una distribuzione cumulativa anziché mediante una distribuzione di frequenza. I singoli termini si ottengono facilmente come somme parziali delle frequenze relative (v. gli esempi 3.7 e 3.8).

Se i dati raggruppati rappresentano risultati di un certo processo stocastico (per es. si sceglie a caso un giorno del mese e si misura la temperatura di quel giorno), l'ordinata della distribuzione cumulativa corrispondente all'intervallo i -esimo può essere interpretata come la probabilità che un risultato non supererà x_i , dove x_i è il limite di destra dell'intervallo i -esimo. Questa interpretazione, naturalmente, sarà valida soltanto se il gruppo dei dati è grande abbastanza da essere veramente rappresentativo del processo.

Esempio 4.22. Qual è la probabilità che, in un giorno di gennaio a Fairweather, in Florida, la temperatura media risulti inferiore od uguale a 18 °C?

La fig. 4-4 mostra la distribuzione cumulativa dei dati di temperatura forniti nell'esempio 4.18. Si vede da questa figura che il valore dell'ordinata corrispondente da 18 °C (cioè al limite destro dell'intervallo 16-18 °C) è circa 52% (in effetti 51.9%). Vi è così una probabilità del 52% che in un giorno di gennaio la temperatura media a Fairweather, in Florida, sia inferiore od uguale a 18 °C.

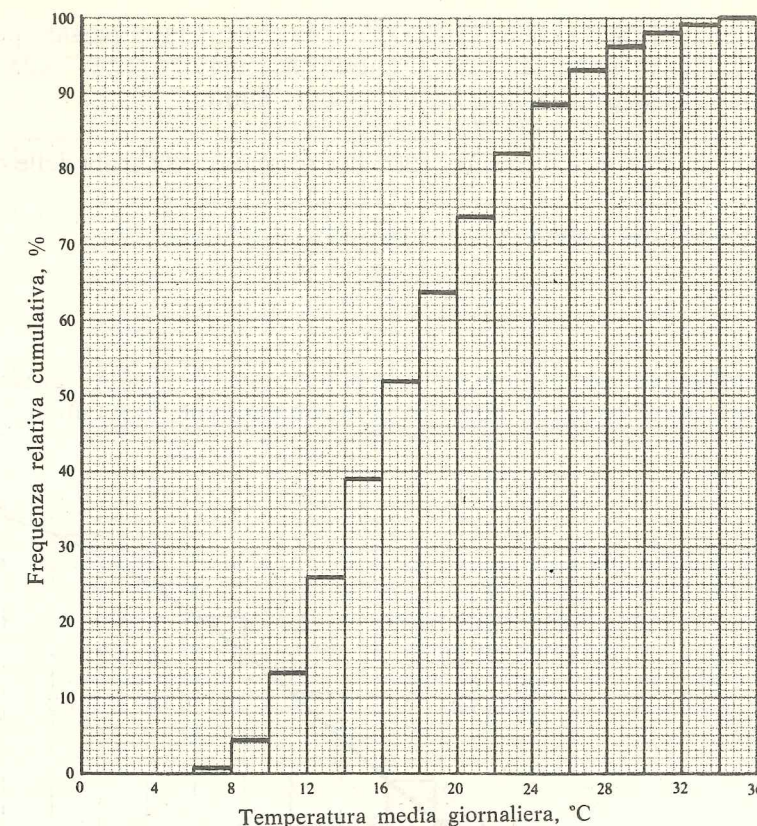


Fig. 4-4

Abbiamo già visto che la media, la moda (o le mode), la varianza e la deviazione standard di un gruppo di dati possono venire facilmente determinate dalla distribuzione cumulativa, facendo uso della formula di interpolazione lineare

$$\tilde{x} = x_{m-1} + \frac{50 - y_{m-1}}{y_m - y_{m-1}} (x_m - x_{m-1})$$

dove $\tilde{x}$ = valore mediano
 x_{m-1} = limite di sinistra dell'intervallo m -esimo
 x_m = limite di destra dell'intervallo m -esimo
 y_{m-1} = valore dell'ordinata per l'intervallo $(m - 1)$ -esimo
 y_m = valore dell'ordinata per l'intervallo m -esimo

Nella formula precedente l'intervallo m -esimo è l'intervallo avente il più piccolo valore dell'ordinata che risulti maggiore o uguale al 50% (cioè l'intervallo più a sinistra a cui corrisponde un valore dell'ordinata maggiore o uguale al 50%).

Esempio 4.23. Calcolare la mediana dei dati di temperatura dell'esempio 4.18.

L'intervallo 16-18 °C è l'intervallo più a sinistra a cui corrisponde un valore dell'ordinata (51.9%) maggiore o uguale al 50% (v. la fig. 4-4). Così, utilizzando la formula precedente,

$$\tilde{x} = 16 + \frac{50 - 39.1}{51.9 - 39.1} (18 - 16) = 17.7 \text{ °C}$$

Nel par. 4.6 abbiamo visto come l'istogramma di una distribuzione di frequenza si riconduceva ad una curva continua, la funzione di densità di probabilità $f(x)$, quando gli intervalli crescevano di numero e diminuivano di ampiezza. Similmente, il diagramma della corrispondente distribuzione cumulativa si trasforma nella *funzione di distribuzione cumulativa*

$F(x)$. (La sola differenza è che la curva di interpolazione viene fatta passare per il limite destro di ciascun intervallo nel diagramma della distribuzione cumulativa. Si veda la fig. 4-5). La funzione $F(x)$ è non decrescente nella x ed ha i valori limite

$$F(-\infty) = 0 \quad F(+\infty) = 1 \text{ ovvero } 100\% \text{ (a seconda della scala delle ordinate)}$$

La relazione fra $F(x)$ ed $f(x)$ (qualora si usino ordinate frazionarie) è

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x') dx$$

cioè la funzione di distribuzione è l'integrale della funzione di densità. (Si ricordi che un integrale rappresenta effettivamente il valore limite di una somma cumulativa).

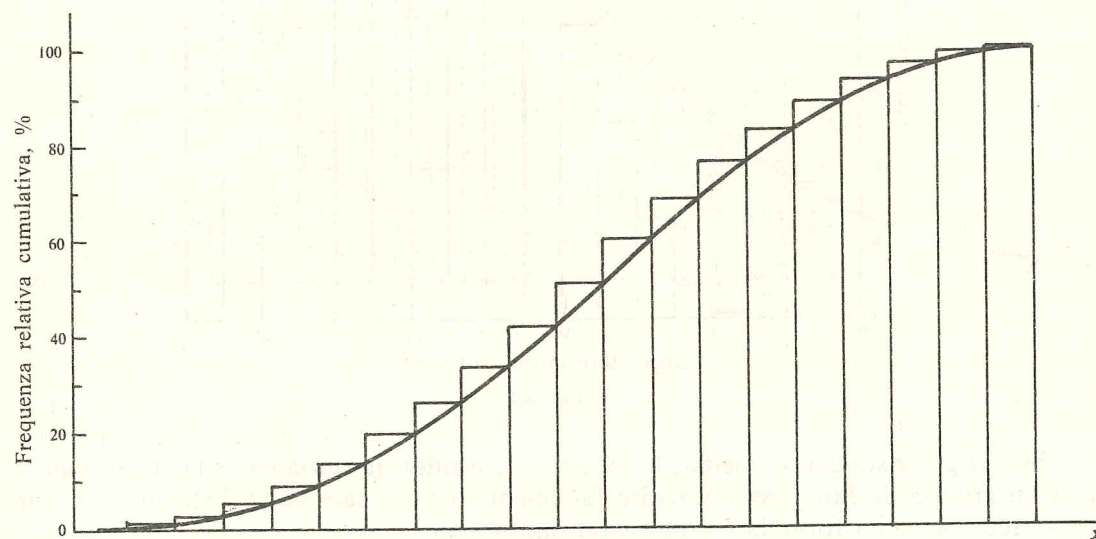


Tabella 4-5

4.8 LA DISTRIBUZIONE NORMALE

Sono state sviluppate molte funzioni di distribuzione teoriche differenti per descrivere certi tipi di processi implicanti eventi casuali. Fra queste una è di particolare importanza nella scienza e nell'ingegneria. Si tratta della distribuzione *normale* o *gaussiana*, che può venire utilizzata per caratterizzare la variazione in dati misurati per un grande numero di situazioni fisiche differenti. Per esempio, le altezze ed i pesi delle persone, le variazioni nelle tolleranze di fabbricazione ed, in certi casi, il verificarsi di errori casuali sono tutti eventi che tendono a presentare una distribuzione normale.

La *curva normale* (il diagramma della funzione di densità di probabilità) è a forma di campana e simmetrica, come è illustrato in fig. 4-6. Sebbene vi siano alcune altre funzioni teoriche di densità di distribuzione che hanno una forma simile, la funzione di densità normale viene generalmente usata per rappresentare dati la cui distribuzione di frequenza sia approssimativamente simmetrica e a forma di campana.

Esempio 4.24. Una fabbrica produce circuiti integrati (*chips*) per calcolatori elettronici. La tab. 4-5 indica il numero di chips difettosi fabbricati durante un certo numero di turni di lavoro di 8 ore.

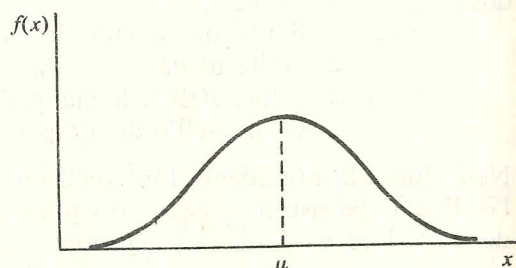


Fig. 4-6

Table 4-5

Difetti per turno	Numero dei casi	Frequenza relativa
0-2	0	
3-4	2	3.6
5-6	4	7.3
7-8	8	14.5
9-10	12	21.8
11-12	13	23.6
13-14	9	16.4
15-16	5	9.1
17-18	2	3.6
TOTALI	55	99.9%

Costruire il diagramma della frequenza relativa per ciascun intervallo in funzione del punto centrale dell'intervallo corrispondente. Che cosa si può dedurre circa la natura della distribuzione?

La fig. 4-7 mostra un diagramma dei dati. Vi sono in effetti troppo pochi punti-dato, e troppo dispersi, per poter determinare una curva continua precisa. E' comunque plausibile che le frequenze possano essere rappresentate da una curva simmetrica a forma di campana, come è indicato dalla curva tratteggiata in fig. 4-7. Non è chiaro tuttavia da questo diagramma se i dati sono effettivamente governati da una distribuzione normale.

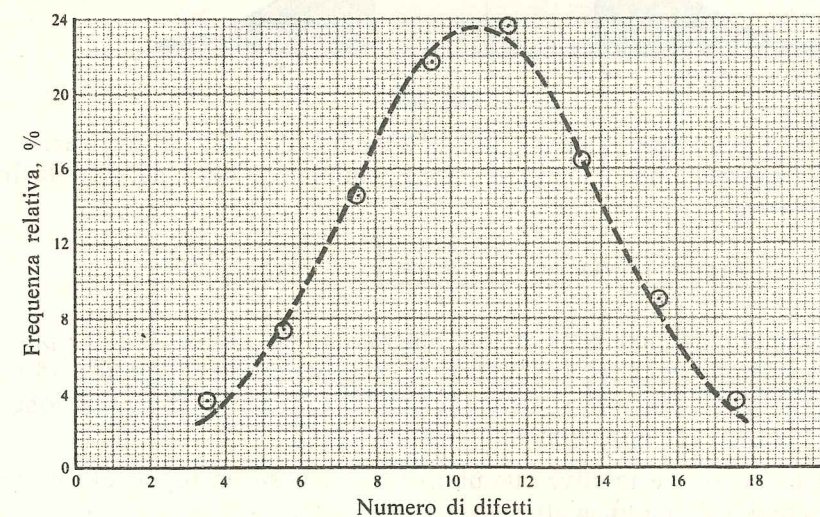


Fig. 4-7

Nell'esempio 3.18 abbiamo costruito la distribuzione cumulativa per questo stesso gruppo di dati ed abbiamo rappresentato la distribuzione cumulativa su un diagramma di probabilità (fig. 3-25). La linea retta che ne risultava ci ha portato a concludere che i dati di frequenza possono effettivamente venire rappresentati da una funzione di densità normale. Si vede così che il rappresentare una distribuzione cumulativa su un diagramma di probabilità è una prova molto più esauriente che non il rappresentare le frequenze relative. Diremo di più su questo punto più avanti in questo stesso paragrafo.

La distribuzione normale ha le seguenti importanti caratteristiche.

1. La funzione di densità rappresentata dalla curva normale è la

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-[(x-\mu)/\sigma]^2/2}$$

dove μ è la media e σ è la deviazione standard. (Si noti che questi due parametri si applicano alla *curva normale*, e non ai *dati* rappresentati dalla curva. In genere μ e σ differiscono alquanto dalla media dei campioni $\bar{x}$ e dalla deviazione standard sui campioni s , ottenute direttamente dai dati).

- La curva normale è simmetrica rispetto alla media.
- La mediana e la moda hanno lo stesso valore della media.
- L'area sottesa alla curva normale è uguale ad uno, cioè

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

(Questo è vero per tutte le funzioni di densità teoriche).

- Se un gruppo di eventi casuali è governato da una distribuzione normale con media μ e deviazione standard σ , il 68.2% degli eventi avrà valori corrispondenti di x compresi fra $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$. Inoltre il 95.4% degli eventi avrà valori corrispondenti di x compresi fra $\mu - 2\sigma$ e $\mu + 2\sigma$, ed il 99.7% avrà valori corrispondenti di x compresi fra $\mu - 3\sigma$ e $\mu + 3\sigma$. Queste percentuali corrispondono alle porzioni dell'area sottesa alla curva mostrate in fig. 4-8.

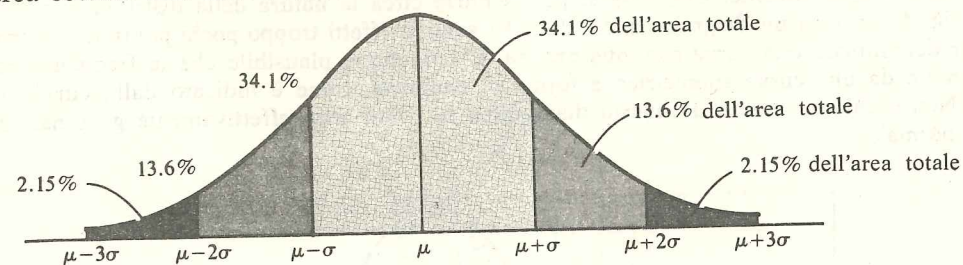


Fig. 4-8

Le proprietà 2, 3 e 5 sono specialmente utili nell'analisi dei dati, come verrà ora discusso. Abbiamo già imparato che una distribuzione cumulativa normale, cioè la funzione di distribuzione cumulativa

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x') dx' = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-[(x' - \mu)/\sigma]^2/2} dx'$$

può essere rappresentata da una retta in un diagramma di probabilità (v. par. 3.5). Questo ci offre un metodo semplice per adattare una distribuzione normale ad un gruppo di dati (a patto, naturalmente, che i dati possano essere rappresentati con precisione ragionevole da una tale distribuzione). Il procedimento è il seguente.

- Riportare le frequenze relative cumulative dei dati su un foglio di un grafico di probabilità e condurre una linea attraverso i punti-dato.
- Leggere l'ascissa corrispondente ad un'ordinata del 50% (o pari a 0.5, se le ordinate variano da 0 ad 1). Questa sarà la media μ (così come sarà pure la mediana e la moda).
- Leggere l'ascissa corrispondente ad un'ordinata pari al $50 - 34.1 = 15.9\%$. Questo valore è uguale a $\mu - \sigma$. Poiché μ è già stato determinato, si può ora ottenere $\sigma = \mu - (\mu - \sigma)$.

Noti μ e σ , la funzione di densità normale

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-[(x - \mu)/\sigma]^2/2}$$

diventa una funzione nota, esplicita, della x .

Esempio 4.25. Adattare una curva normale ai dati dell'esempio 4.24.

La fig. 4-9 riproduce la fig. 3-25, nella quale si erano originariamente riportate le frequenze relative cumulative dei dati.

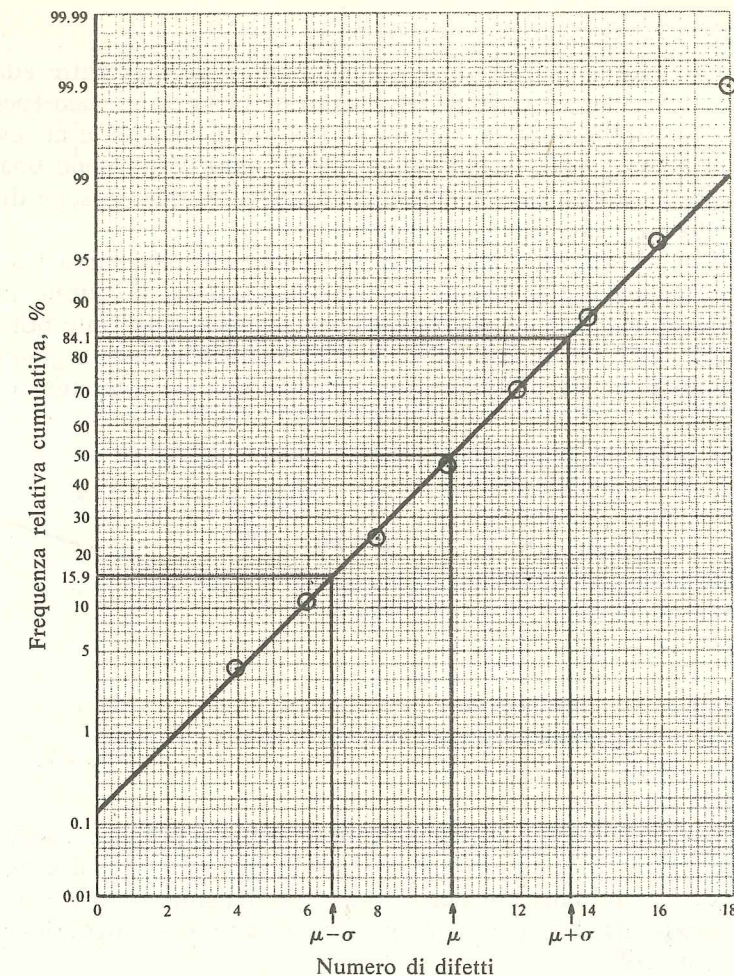


Fig. 4-9

Dalla fig. 4-9 risulta che l'ascissa corrispondente ad un'ordinata del 50% vale 10.1. Quindi $\mu = 10.1$ (per cui la media, la mediana e la moda hanno tutte il valore 10.1). Inoltre l'ascissa corrispondente ad un'ordinata del 15.9% vale 6.7. Quindi

$$\sigma = 10.1 - 6.7 = 3.4$$

Si può anche ottenere la deviazione standard leggendo l'ascissa corrispondente ad un'ordinata dell'84.1%. Questo fornisce $\mu + \sigma = 13.5$, da cui

$$\sigma = 13.5 - 10.1 = 3.4$$

come prima.

La funzione di densità normale richiesta può ora venire scritta nella forma

$$f(x) = \frac{1}{3.4 \sqrt{2\pi}} e^{-[(x - 10.1)/3.4]^2/2} = 0.117336 e^{-[(x - 10.1)/3.4]^2/2}$$

Si deve tener presente che una curva normale ottenuta come nell'esempio 4.25 può avere valori delle ordinate completamente differenti da quelli della distribuzione di frequenza originaria. La ragione di questa apparente incongruenza sta nel fatto che l'area sottesa alla curva normale deve essere uguale all'unità, condizione che non è necessariamente soddisfatta dai dati di frequenza originari. Questa discrepanza può venire eliminata moltiplicando tutte le frequenze originarie per un opportuno fattore di scala (v. il problema 4.18).

4.9 METODI DI INTERPOLAZIONE MEDIANTE CURVE

Abbiamo già visto che certe equazioni matematiche possono venire adattate a dati misurati mettendo in grafico i dati su un tipo opportuno di carta da grafico (per es. semilogaritmica, bilogaritmica, di probabilità) e conducendo poi una linea retta attraverso i punti-dato. Naturalmente il metodo sarà valido soltanto se i punti-dato definiscono una linea ragionevolmente retta. Ma anche in questo caso il metodo è soggettivo; due persone diverse non disegneranno mai esattamente la stessa retta attraverso i dati.

Un altro modo di affrontare il problema di interpolare una curva fra un gruppo di punti-dato è quello di utilizzare il *metodo dei minimi quadrati*. È questo un metodo consistente, nel senso che esso fornisce un procedimento sistematico per interpolare un'unica curva fra un gruppo di dati. Non risulta coinvolto in tale operazione nessun giudizio personale; inoltre il procedimento può essere facilmente realizzato con un computer o con un calcolatore elettronico.

Supponiamo di voler interpolare una curva $y = f(x)$ fra un gruppo di M punti-dato $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_M, y_M)$. Il metodo dei minimi quadrati si basa sul concetto di minimizzare la somma degli errori quadratici, cioè

$$\text{Minimizzare } S = e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_M^2$$

dove e_i , l'errore i -esimo, è la differenza fra il valore osservato y_i e l'ordinata della curva interpolante in corrispondenza di x_i , come è illustrato in fig. 4-10.

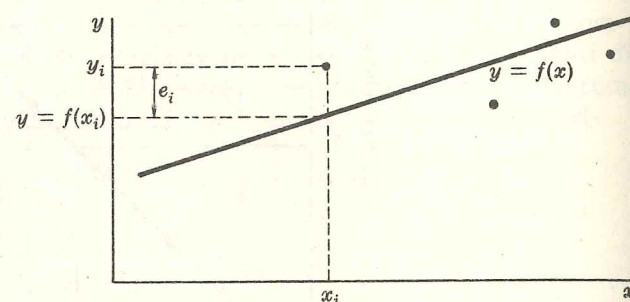


Fig. 4-10

Il metodo viene comunemente applicato a linee rette, a polinomi, a funzioni di potenze ed a funzioni esponenziali. In ciascun caso il metodo richiede di risolvere un sistema di equazioni algebriche lineari simultanee, in cui le quantità incognite sono le *costanti* nell'equazione della curva. (Un metodo efficace per la risoluzione di equazioni algebriche lineari simultanee sarà presentato nel cap. 5).

Retta dei minimi quadrati

Supponiamo di voler condurre una linea retta, $y = c_1 + c_2x$, attraverso un gruppo di M punti-dato. Il metodo dei minimi quadrati conduce alle due seguenti equazioni nelle costanti incognite c_1 e c_2 (v. il problema 4.19):

$$\begin{aligned} Mc_1 + \left(\sum_{i=1}^M x_i \right) c_2 &= \sum_{i=1}^M y_i \\ \left(\sum_{i=1}^M x_i \right) c_1 + \left(\sum_{i=1}^M x_i^2 \right) c_2 &= \sum_{i=1}^M x_i y_i \end{aligned}$$

dove il simbolo Σ indica la somma, come per es.

$$\sum_{i=1}^M x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_M$$

Per evitare grossi errori numerici è essenziale che i termini della somma siano valutati con la maggiore precisione possibile.

Esempio 4.26. Un certo numero di punti-dato misurati rappresentanti la forza di taglio in una trave (F) in funzione della distanza dall'estremità di sinistra (x) della trave stessa sono riportati nella tabella seguente. Condurre una retta interpolante attraverso i punti-dato, utilizzando il metodo dei minimi quadrati.

x , cm	10	20	30	40	50	60	70	80
F , N	4	13	20	22	27	38	42	45

Il primo passo nell'effettuare i calcoli è quello di costruire la tab. 4-6.

Tabella 4-6

x	x^2	F	xF
10	100	4	40
20	400	13	260
30	900	20	600
40	1 600	22	880
50	2 500	27	1 350
60	3 600	38	2 280
70	4 900	42	2 940
80	6 400	45	3 600
Totali	360	211	11 950

Sostituendo le somme totali nelle equazioni dei minimi quadrati per una retta, si ottiene

$$8c_1 + 360c_2 = 211$$

$$360c_1 + 20\,400c_2 = 11\,950$$

Queste due equazioni possono essere risolte con metodi elementari (per es. per sostituzione) oppure col metodo presentato nel cap. 5. In ogni caso, la soluzione è $c_1 = 0.071\,429$, $c_2 = 0.584\,524$. Quindi la retta interpolante richiesta è

$$F = 0.0714 + 0.585x$$

La fig. 4-11 mostra un diagramma di questa equazione, insieme ai punti-dato.

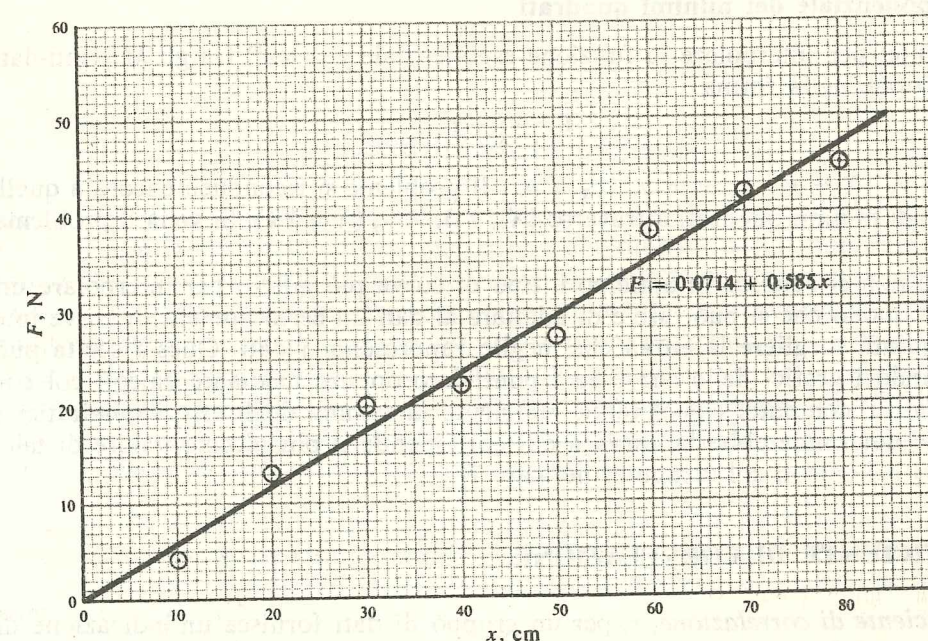


Fig. 4-11

Il metodo dei minimi quadrati è particolarmente utile in problemi come questo, in cui i punti-dato presentano un apprezzabile grado di dispersione. L'impiego di procedimenti di interpolazione soggettivi (per es. quello di disegnare « ad occhio » una curva fra i dati) può perciò essere evitato.

Polinomio dei minimi quadrati

Si consideri ora un caso più generale, in cui si voglia interpolare il polinomio

$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + \dots + c_{n+1}x^n$$

in un gruppo di M punti-dato. (La retta interpolante corrisponde ad $n = 1$). Si possono determinare i coefficienti $c_1, c_2, \dots, c_{n+1}$ risolvendo il sistema delle $n + 1$ equazioni simultanee:

$$\begin{aligned} M c_1 + \left(\sum_{i=1}^M x_i \right) c_2 + \left(\sum_{i=1}^M x_i^2 \right) c_3 + \dots + \left(\sum_{i=1}^M x_i^n \right) c_{n+1} &= \sum_{i=1}^M y_i \\ \left(\sum_{i=1}^M x_i \right) c_1 + \left(\sum_{i=1}^M x_i^2 \right) c_2 + \left(\sum_{i=1}^M x_i^3 \right) c_3 + \dots + \left(\sum_{i=1}^M x_i^{n+1} \right) c_{n+1} &= \sum_{i=1}^M x_i y_i \\ \dots &\dots \\ \left(\sum_{i=1}^M x_i^n \right) c_1 + \left(\sum_{i=1}^M x_i^{n+1} \right) c_2 + \left(\sum_{i=1}^M x_i^{n+2} \right) c_3 + \dots + \left(\sum_{i=1}^M x_i^{2n} \right) c_{n+1} &= \sum_{i=1}^M x_i^n y_i \end{aligned}$$

Il problema 4.22 fornisce un esempio numerico per $n = 2$ (una parabola).

Funzione di potenze dei minimi quadrati

Supponiamo di volere far passare la funzione di potenze $y = ax^b$ attraverso un gruppo di M punti-dato. Trasformando l'equazione nella

$$Y = c_1 + c_2 X$$

dove $Y = \log y$, $X = \log x$, $c_1 = \log a$, $c_2 = b$, si vede che il problema si riduce a quello di trovare la retta dei minimi quadrati attraverso i punti-dato $(X_1, Y_1), \dots, (X_M, Y_M)$. Si veda il problema 4.20 per un esempio numerico.

Funzione esponenziale dei minimi quadrati

Similmente, per interpolare la funzione esponenziale $y = ae^{bx}$ fra gli M punti-dato, riscriviamo l'equazione nella forma

$$Y = c_1 + c_2 X$$

dove $Y = \ln y$, $X = x$, $c_1 = \ln a$, $c_2 = b$. Il problema si riconduce ancora a quello di trovare la retta dei minimi quadrati attraverso $(X_1, Y_1), \dots, (X_M, Y_M)$. Si veda il problema 4.21.

Di solito non si conosce in anticipo il tipo di curva più adatto per interpolare un gruppo di dati. Tutto quello che si può fare è di adattare ai dati un certo numero di curve interpolanti differenti e quindi scegliere la curva che meglio rappresenta i dati. Questa scelta può essere fatta esaminando i grafici delle curve ed i punti-dato oppure mediante calcoli col computer. Nell'ultimo caso il computer calcolerebbe realmente la somma degli errori quadratici per ciascuna curva e determinerebbe la curva a cui corrisponde il più piccolo valore di tale somma. Diremo di più sui calcoli col computer nel cap. 7.

4.10 COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE

Il coefficiente di correlazione, r , per un gruppo di dati fornisce un'indicazione di come i dati possano essere ben rappresentati da una linea retta. Si tratta di una quantità calcolata il cui valore cadrà sempre entro l'intervallo $-1 \leq r \leq 1$. Così i dati cadranno approssimativamente lungo una linea retta se $|r| \approx 1$. (La pendenza della retta sarà positiva se $r \approx +1$, e negativa se $r \approx -1$.) Una rappresentazione mediante una linea retta non sarà tuttavia valida se il valore di r è prossimo allo zero.

Il coefficiente di correlazione si determina mediante la formula

$$r = \frac{M \sum_{i=1}^M x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^M x_i \right) \left(\sum_{i=1}^M y_i \right)}{\left[\left[M \sum_{i=1}^M x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^M x_i \right)^2 \right] \left[M \sum_{i=1}^M y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^M y_i \right)^2 \right] \right]^{1/2}}$$

dove M rappresenta il numero dei punti-dato, ed x_i ed y_i rappresentano i valori osservati delle due variabili. Si noti che r rimane lo stesso scambiando fra loro le x_i con le y_i ; quindi non fa differenza quale variabile sia considerata la variabile indipendente.

Esempio 4.27. Valutare il coefficiente di correlazione per i dati presentati nell'esempio 4.26.

Qui, $M = 8$. I totali delle colonne nella tab. 4-6 forniscono

$$\sum_{i=1}^8 x_i = 360 \quad \sum_{i=1}^8 x_i^2 = 20\,400 \quad \sum_{i=1}^8 F_i = 211 \quad \sum_{i=1}^8 x_i F_i = 11\,950$$

Inoltre

$$\sum_{i=1}^8 F_i^2 = 7031$$

Con ciò il coefficiente di correlazione risulta

$$r = \frac{8(11\,950) - (360)(211)}{[8(20\,400) - (360)^2][8(7031) - (211)^2]^{1/2}} = \frac{95\,600 - 75\,960}{[(33\,600)(11\,727)]^{1/2}} = 0.989\,415$$

Poiché questo valore è molto prossimo a $+1$, abbiamo la conferma che i dati cadranno approssimativamente lungo una linea retta di pendenza positiva. Questa conclusione è verificata dalla fig. 4-11.

PROBLEMI RISOLTI

- 4.1. Un voltmetro ha una scala che varia da 0 a 10 V. La scala è suddivisa in intervalli di 0.5 V. (a) Se la posizione dell'ago può essere determinata con l'approssimazione di metà intervallo, quale sarà l'incertezza associata con le letture effettuate su questa scala del voltmetro? (b) Supponiamo che l'ago dello strumento sia collocato in prossimità della suddivisione 8 V. Quale tensione dovrebbe essere registrata se l'incertezza sulla misura deve venire specificata insieme col valore misurato? (c) Quale tensione dovrebbe essere registrata se l'ago è posto in prossimità della suddivisione 1.5 V? Supponiamo ora che l'ago si trovi approssimativamente a metà strada fra le suddivisioni di scala 5.5 e 6 V. Quale tensione dovrebbe venire registrata?

(a) ± 0.25 V (b) 8.0 ± 0.25 V (c) 1.5 ± 0.25 V (d) 5.75 ± 0.25 V. Si noti che vi è incertezza sulle due ultime cifre di questa lettura. Potrebbe così essere opportuno un arrotondamento in eccesso (in virtù della regola dell'aggiunta al dispari), col risultato di una tensione registrata pari a 5.8 ± 0.25 V.

- 4.2. La tensione di linea fornita da un servizio elettrico venne misurata in cinque momenti differenti nel corso della giornata. Il valore medio risultò di 112.2 V, quantunque si fossero riscontrate singole deviazioni pari a 0.1, 0.7, -1.0 , 0.8 e -0.6 V. Quali erano le reali letture di tensione?

Misura n.	Letture
1	112.2 + 0.1 = 112.3 V
2	112.2 + 0.7 = 112.9
3	112.2 - 1.0 = 111.2
4	112.2 + 0.8 = 113.0
5	112.2 - 0.6 = 111.6

4.3. Diverse esperienze sono state effettuate per determinare il tempo richiesto perché una certa reazione chimica avvenga. I valori misurati sono i seguenti.

Prova n.	1	2	3	4	5	6	7
Tempo, s	130.4	127.8	123.2	129.5	129.9	127.3	130.8

(a) Calcolare il valore medio delle misure date. (b) Calcolare le deviazioni rispetto alla media. (c) Determinare quali, se ce ne sono, dei valori misurati sono imprecisi, con riferimento alle deviazioni calcolate. (d) Scartare tutte le misure imprecise, ricalcolare poi il valore medio per i dati rimanenti e calcolare le singole deviazioni. (e) Il valore medio e le singole deviazioni calcolati sono cambiati in maniera significativa?

(a)
$$t_{\text{avg}} = \frac{130.4 + 127.8 + 123.2 + 129.5 + 129.9 + 127.3 + 130.8}{7} = 128.4 \text{ s}$$

Prova n.	Deviazione
1	130.4 - 128.4 = 2.0 s
2	127.8 - 128.4 = -0.6
3	123.2 - 128.4 = -5.2
4	129.5 - 128.4 = 1.1
5	129.9 - 128.4 = 1.5
6	127.3 - 128.4 = -1.1
7	130.8 - 128.4 = 2.4

(c) La deviazione associata alla terza misura è (in valore assoluto) più di due volte maggiore di qualsiasi altra. Sembrerebbe perciò ragionevole scartare la terza misura come imprecisa.

(d)
$$t_{\text{avg}} = \frac{130.4 + 127.8 + 129.5 + 129.9 + 127.3 + 130.8}{6} = 129.3 \text{ s}$$

Prova n.	Deviazione
1	130.4 - 129.3 = 1.1 s
2	127.8 - 129.3 = -1.5
4	129.5 - 129.3 = 0.2
5	129.9 - 129.3 = 0.6
6	127.3 - 129.3 = -2.0
7	130.8 - 129.3 = 1.5

(e) Sia il valore medio sia le singole deviazioni sono cambiate. I valori ricalcolati sono presumibilmente più precisi.

4.4. Mostrare che la somma delle deviazioni rispetto alla media è uguale a zero (cioè che le deviazioni si annullano l'una con l'altra).

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 + \dots + d_n &= (x_1 - x_{\text{avg}}) + (x_2 - x_{\text{avg}}) + \dots + (x_n - x_{\text{avg}}) \\ &= (x_1 + x_2 + \dots + x_n) - nx_{\text{avg}} \\ &= n \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right) - nx_{\text{avg}} \\ &= nx_{\text{avg}} - nx_{\text{avg}} = 0 \end{aligned}$$

In pratica, può accadere che la somma delle deviazioni non risulti esattamente uguale a zero a causa di errori di arrotondamento.

4.5. Un appezzamento di terreno fu misurato e risultò essere approssimativamente lungo 80 m. Una misurazione più precisa, fatta da un perito, diede come risultato 81.47 m. Determinare l'errore assoluto, l'errore relativo, e l'errore percentuale associati alla misura approssimata, assumendo che la misura del perito sia, per tutti gli scopi pratici, esente da errori.

$$\text{errore assoluto} = 80 - 81.47 = -1.47 \text{ m}$$

$$\text{errore relativo} = \frac{80 - 81.47}{81.47} = -0.01804$$

$$\text{errore percentuale} = 100 \left(\frac{80 - 81.47}{81.47} \right) = -1.804\%$$

Si noti che l'errore assoluto è dato con due cifre decimali in conformità col valore vero (la misura del perito). Similmente, l'errore relativo e l'errore percentuale sono arrotondati a quattro cifre significative, sempre perché risultino consistenti col valore vero.

4.6. Un recipiente sferico per lo stoccaggio di gas ha un diametro misurato di 27.4 m. Se il dispositivo di misura ha una precisione di $\pm 0.5\%$, quale sarà il volume del recipiente?

Il diametro reale cadrà fra i limiti

$$(1 - 0.005)(27.4) = 27.263 \text{ m} \quad \text{e} \quad (1 + 0.005)(27.4) = 27.537 \text{ m}$$

I limiti corrispondenti per il volume del recipiente sono

$$V_{\text{min}} = \frac{\pi(27.263)^3}{6} = 10\,610 \text{ m}^3 \quad \text{e} \quad V_{\text{max}} = \frac{\pi(27.537)^3}{6} = 10\,933 \text{ m}^3$$

Quindi il volume sarà compreso fra 10.600 e 10.900 m³.

4.7. Supponiamo che il diametro misurato nel problema 4.6 sia risultato valutato in difetto dello 0.4%. Quale sarà il volume del recipiente?

L'errore percentuale si basa ora sul diametro vero anziché sul diametro misurato. Quindi il reale diametro del recipiente si calcola con la

$$\frac{27.4}{1 - 0.004} = 27.510 \text{ m}$$

Il volume del recipiente sarà quindi

$$V = \frac{\pi(27.510)^3}{6} = 10\,901 \text{ m}^3$$

4.8. La media aritmetica di cinque misure è risultata pari a 47.65. Una sesta misura, il cui valore è 55.17, si è ottenuta recentemente. Determinare la media aritmetica di tutti e sei i valori misurati.

$$x_{\text{avg}} = \frac{5(47.65) + 55.17}{6} = \frac{5}{6}(47.65) + \frac{1}{6}(55.17) = 48.90$$

4.9. Alla fine di ogni trimestre un'università determina una « media di punti di qualità » (QPA) per ciascuno studente. La QPA è in effetti una media pesata, nella quale le quantità che vengono mediate sono gli equivalenti numerici dei punteggi letterali conseguiti durante il trimestre. I pesi sono il numero di ore di credito per ciascun corso diviso per il numero totale di ore di credito previste per il trimestre. Determinare la QPA per lo studente di ingegneria del primo anno il cui registro dei voti è mostrato qui sotto.

Corso	Ore di credito	Voto
Analisi matematica I	4	A
Composizione inglese	3	C
Chimica	4	B
Introd. all'ingegneria	2	A
Analisi dell'ingegneria	2	B
Educazione fisica	1	D
Totale	16	

In questa università, un voto A ha un equivalente numerico di 4 punti, un voto B equivale a 3 punti, ecc.

$$\begin{aligned} QPA &= \frac{4(4) + 3(2) + 4(3) + 2(4) + 2(3) + 1(1)}{16} \\ &= \frac{4}{16}(4) + \frac{3}{16}(2) + \frac{4}{16}(3) + \frac{2}{16}(4) + \frac{2}{16}(3) + \frac{1}{16}(1) = 3.063 \end{aligned}$$

- 4.10. Calcolare la media, la mediana, la moda, la varianza e la deviazione standard per il seguente gruppo di dati: 4, -3, 5, 8, 11, -2, 0, -5.

$$\bar{x} = \frac{4 - 3 + 5 + 8 + 11 - 2 + 0 - 5}{8} = 2.250 \quad \tilde{x} = \frac{0 + 4}{2} = 2.0$$

Poiché ciascun valore dei dati compare soltanto una volta, la moda non esiste.

$$\begin{aligned} v &= \frac{(4)^2 + (-3)^2 + (5)^2 + (8)^2 + (11)^2 + (-2)^2 + (0)^2 + (-5)^2}{8} - (2.250)^2 = 27.9375 \\ s &= \sqrt{27.9375} = 5.2856 \end{aligned}$$

Si noti che le quantità calcolate includono valori frazionari, anche se i valori dei dati sono tutti interi.

- 4.11. Mostrare che le due formule per la varianza presentate nel par. 4.4 sono equivalenti.

$$\begin{aligned} v &= \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n} \\ &= \frac{(x_1^2 - 2x_1\bar{x} + \bar{x}^2) + (x_2^2 - 2x_2\bar{x} + \bar{x}^2) + \cdots + (x_n^2 - 2x_n\bar{x} + \bar{x}^2)}{n} \\ &= \frac{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) - 2\bar{x}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + n\bar{x}^2}{n} \\ &= \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n} - 2\bar{x} + \bar{x}^2 \\ &= \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2 \end{aligned}$$

- 4.12. Ripetere il calcolo dell'esempio 4.14 utilizzando per la media il valore arrotondato $\bar{x} = 11.32$ kg. Confrontare la risposta col risultato ottenuto nell'esempio 4.14.

$$\begin{aligned} v &= \frac{(11.33)^2 + (11.27)^2 + (11.38)^2 + (11.30)^2 + (11.29)^2 + (11.30)^2 + (11.34)^2 + (11.31)^2 + (11.32)^2}{9} - (11.32)^2 \\ &= -0.09969 \text{ kg}^2 \end{aligned}$$

La risposta corretta, ottenuta nell'esempio 4.14 utilizzando $\bar{x} = 11.315556$ kg, è $v = 0.0009035 \text{ kg}^2$. Si vede così che si può incorrere in un errore molto grande usando un valore arrotondato per $\bar{x}$ nel calcolo della varianza.

- 4.13. Raggruppare i seguenti dati negli intervalli 0-1.99, 2.00-3.99, 4.00-5.99, ecc., e calcolare la frequenza relativa per ciascun intervallo. 6.05, 2.82, 14.27, 12.97, 7.36, 8.68, 12.53, 3.59, 10.82, 3.32, 10.59, 11.26, 10.28, 8.88, 1.24, 11.95, 13.28, 12.48, 8.60, 5.92, 8.18, 11.80, 9.87, 15.77, 7.46, 6.57, 8.03, 13.61, 10.93, 12.05, 15.62, 11.79, 9.03, 8.48, 5.89, 15.64, 9.61, 4.13, 15.18, 7.82, 7.97, 9.22, 8.91, 9.85, 9.31, 11.02, 11.15, 3.98, 17.79, 14.53, 16.05, 16.34, 1.74, 9.38, 13.15, 6.85, 12.69, 12.01, 8.88, 17.84.

V. la tab. 4-7.

Tabella 4-7

Intervallo	Numero di punti-dato	Frequenza relativa, %
0.00-1.99	2	3.3
2.00-3.99	4	6.7
4.00-5.99	3	5.0
6.00-7.99	7	11.7
8.00-9.99	15	25.0
10.00-11.99	10	16.6
12.00-13.99	9	15.0
14.00-15.99	6	10.0
16.00-17.99	4	6.7
18.00-19.99	0	0
Totale	60	100.0%

- 4.14. Calcolare la media e la deviazione standard (a) per il gruppo di dati del problema 4.13, (b) per i dati raggruppati ottenuti da questi nella tab. 4-7. Quale coppia di valori è più precisa?

$$(a) \quad \bar{x} = \frac{6.05 + 2.82 + 14.27 + \cdots + 8.88 + 17.84}{60} = 10.050167 \approx 10.05$$

$$s = \left[\frac{(6.05)^2 + (2.82)^2 + (14.27)^2 + \cdots + (8.88)^2 + (17.84)^2}{60} - (10.050167)^2 \right]^{1/2} = 3.90$$

$$(b) \quad \bar{x} = (0.033)(1.00) + (0.067)(3.00) + \cdots + (0.067)(17.00) = 9.9680 \approx 9.97$$

$$s = \{[(0.033)(1.00)^2 + (0.067)(3.00)^2 + \cdots + (0.067)(17.00)^2] - (9.9680)^2\}^{1/2} = 3.98$$

I valori calcolati in (a) sono necessariamente più precisi, quantunque questi singoli punti-dato non sempre siano disponibili.

- 4.15. Trovare la distribuzione cumulativa dei dati raggruppati presentati nella tab. 4-7.

V. la tab. 4-8.

Tabella 4-8

Intervallo	Frequenza relativa, %	Frequenza relativa cumulativa, %
0.00-1.99	3.3	3.3
2.00-3.99	6.7	10.0
4.00-5.99	5.0	15.0
6.00-7.99	11.7	26.7
8.00-9.99	25.0	51.7
10.00-11.99	16.6	68.3
12.00-13.99	15.0	83.3
14.00-15.99	10.0	93.3
16.00-17.99	6.7	100.0

- 4.16. Determinare la mediana per la distribuzione cumulativa ottenuta nella tab. 4-8.

$$\tilde{x} = 8.00 + \frac{50-26.7}{51.7-26.7}(9.99 - 8.00) = 9.85$$

- 4.17. Interpolare una distribuzione normale sulla distribuzione cumulativa ottenuta nella tab. 4-8. Determinare la media e la deviazione standard della distribuzione normale.

La fig. 4-12 mostra un diagramma dei dati della distribuzione cumulativa su un grafico di probabilità. I dati possono venire ragionevolmente ben rappresentati da una linea retta, sebbene sia presente qualche dispersione. Questa linea rappresenta la funzione di distribuzione normale. Dal diagramma si vede che la distribuzione normale ha una media pari a 10.0 ed una deviazione standard di $10.0 - 6.0 = 4.0$. L'equazione della funzione di densità normale (cioè della curva simmetrica a forma di campana) è allora

$$f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-[(x-10)/4]^2/2} = 0.0997356 e^{-[(x-10)/4]^2/2}$$

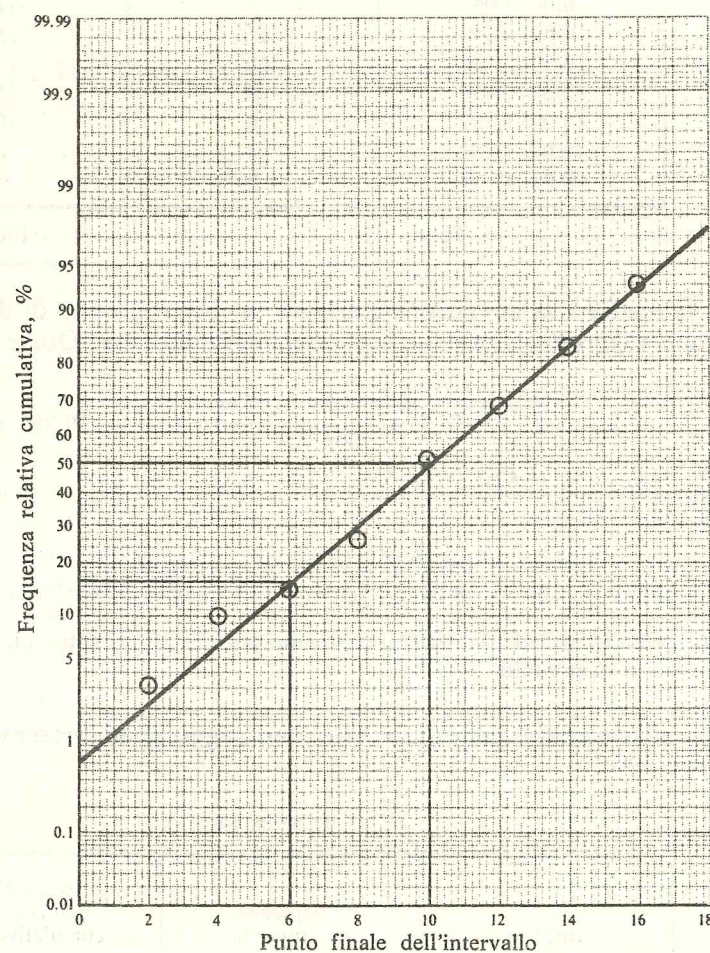


Fig. 4-12

- 4.18. Modificare la distribuzione di frequenza ottenuta nella tab. 4-7 in modo tale che l'area sottesa all'istogramma di frequenza sia uguale all'unità. Riportare i dati modificati in coordinate cartesiane. Sovrapporre a tali punti-dato la funzione di densità normale ottenuta nel problema 4.17 e giudicare fino a che punto essa rappresenti la distribuzione di frequenza modificata.

Ciascun rettangolo dell'istogramma ha un'area data da

$$\text{area} = (\text{ampiezza dell'intervallo}) \times (\text{altezza})$$

Quindi

$$\begin{aligned} \text{area totale} &= (1.99 - 0.00)(3.3) + (3.99 - 2.00)(6.7) + (5.99 - 4.00)(5.0) + \dots + (17.99 - 16.00)(6.7) \\ &= 199\% \end{aligned}$$

Poiché si vuole modificare la distribuzione di frequenza in modo tale che l'area totale sia unitaria, si dovrà dividere ciascuna delle frequenze relative della tab. 4-7 per il 199%. Le frequenze relative modificate sono state riportate in grafico in funzione dei punti centrali dei loro corrispondenti intervalli in fig. 4-13. La curva a tratto pieno è la curva normale ottenuta nel problema 4.17, cioè la rappresentazione grafica della

$$f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-[(x-10)/4]^2/2}$$

L'accordo fra la curva a tratto pieno ed i punti-dato è soltanto discreto, a causa della dispersione dei dati.

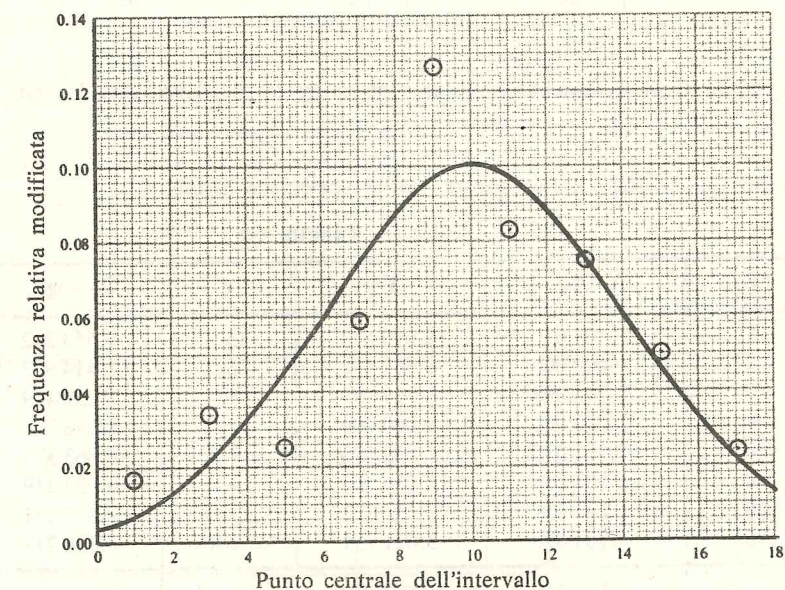


Fig. 4-13

- 4.19. Ricavare le equazioni dei minimi quadrati per l'interpolazione di una linea retta fra un gruppo di M punti-dato.

L'equazione di una retta è $y = c_1 + c_2x$. Quindi la somma degli errori quadratici si può scrivere

$$S = \sum_{i=1}^M e_i^2 = \sum_{i=1}^M [y_i - (c_1 + c_2x_i)]^2$$

Vogliamo determinare i valori di c_1 e di c_2 che rendono minima S . Si pongono dunque uguali a zero le derivate parziali di S rispetto a c_1 e rispetto a c_2 , cioè

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial c_1} &= -2 \sum_{i=1}^M [y_i - (c_1 + c_2x_i)] = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial c_2} &= -2 \sum_{i=1}^M x_i [y_i - (c_1 + c_2x_i)] = 0 \end{aligned}$$

Queste equazioni, opportunamente trasformate, si possono scrivere

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M y_i - \sum_{i=1}^M c_1 - \left(\sum_{i=1}^M x_i \right) c_2 &= 0 \\ \sum_{i=1}^M x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^M x_i \right) c_1 - \left(\sum_{i=1}^M x_i^2 \right) c_2 &= 0 \end{aligned}$$

ovvero, con ulteriori manipolazioni,

$$M c_1 + \left(\sum_{i=1}^M x_i\right) c_2 = \sum_{i=1}^M y_i$$
$$\left(\sum_{i=1}^M x_i\right) c_1 + \left(\sum_{i=1}^M x_i^2\right) c_2 = \sum_{i=1}^M x_i y_i$$

che rappresentano le equazioni finali richieste.

4.20. Utilizzare il metodo dei minimi quadrati per interpolare una funzione di potenze fra i seguenti 8 punti-dato:

x	2	4	7	10	20	40	60	80
y	45	26	17	12.5	7.3	4.2	3.0	2.4

Seguendo il procedimento del par. 4.9, si tratta di individuare la retta dei minimi quadrati

$$Y = c_1 + c_2 X$$

fra i punti (log x_i , log y_i). Per questa via, si costruisce la tab. 4-9.

Tabella 4-9

x	X=log x	X ²	y	Y=log y	XY
2	0.301 030	0.090 619	45	1.653 212	0.497 666
4	0.602 060	0.362 476	26	1.414 973	0.851 899
7	0.845 098	0.714 191	17	1.230 449	1.039 850
10	1.000 000	1.000 000	12.5	1.096 910	1.096 910
20	1.301 030	1.692 679	7.3	0.863 323	1.123 209
40	1.602 060	2.566 596	4.2	0.623 249	0.998 482
60	1.778 151	3.161 822	3.0	0.477 121	0.848 393
80	1.903 090	3.621 751	2.4	0.380 211	0.723 576
Totali	9.332 519	13.210 134		7.739 448	7.179 985

Le somme delle colonne della tab. 4-9 forniscono i coefficienti delle costanti incognite c_1 e c_2 nelle equazioni dei minimi quadrati:

$$8c_1 + 9.332\,519c_2 = 7.739\,448$$
$$9.332\,519c_1 + 13.210\,134c_2 = 7.179\,985$$

Risolvendo tali equazioni, si ha $c_1 = 1.895\,695$, $c_2 = -0.795\,724$. Allora la funzione di potenze richiesta è $y = ax^b$, con

$$a = \text{antilog } c_1 = 78.6493 \quad b = c_2 = -0.795\,724$$

e cioè

$$y = 78.6x^{-0.796}$$

Questa equazione è riportata in grafico, unitamente ai punti-dato, in fig. 4-14.

Nell'esempio 3.14, abbiamo interpolato l'equazione

$$y = 80x^{-0.801}$$

su questo stesso gruppo di dati semplicemente riportando i dati in un diagramma bilogaritmico e conducendo una linea retta attraverso i punti-dato (v. la fig. 3-18). Questa equazione può risultare soddisfacente per alcuni scopi, ma sarà comunque meno precisa della funzione di potenze ottenuta sopra utilizzando il procedimento dei minimi quadrati.

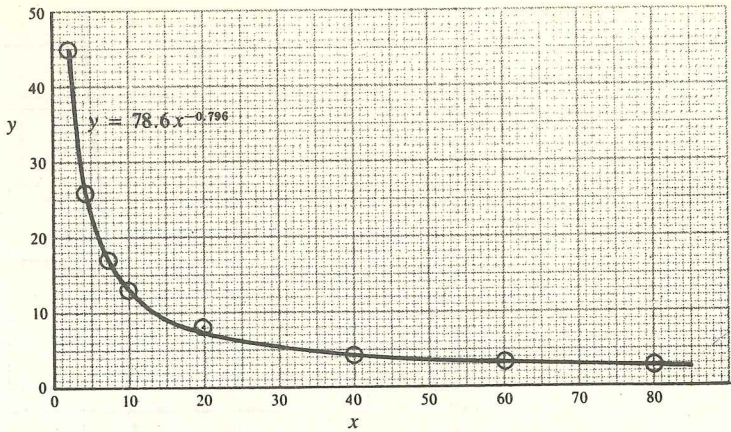


Fig. 4-14

4.21. I seguenti dati descrivono la crescita di una cultura di batteri. La densità di popolazione (d), in parti per milione, è tabulata in funzione del tempo (t). Determinare una equazione esponenziale che rappresenti la densità di popolazione in funzione del tempo, utilizzando il metodo dei minimi quadrati.

t, giorni	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
d, ppm	0.10	0.45	2.01	9.00	40.34	180.80

Seguendo il procedimento del par. 4.9, cerchiamo la retta dei minimi quadrati

$$D = c_1 + c_2 T$$

che interpola i punti (t_i , $\ln d_i$). Per fare questo, costruiamo la tab. 4-10.

Tabella 4-10

T = t	T ²	d	D = ln d	TD
0	0	0.10	-2.302 585	0
0.5	0.25	0.45	-0.798 508	-0.399 254
1.0	1.00	2.01	0.698 135	0.698 135
1.5	2.25	9.00	2.197 225	3.295 837
2.0	4.00	40.34	3.697 344	7.394 687
2.5	6.25	180.80	5.197 391	12.993 479
Totali	7.5		8.689 002	23.982 884

Le equazioni dei minimi quadrati per c_1 e per c_2 sono allora:

$$6c_1 + 7.5c_2 = 8.689\,002$$
$$7.5c_1 + 13.75c_2 = 23.982\,884$$

che, risolte, forniscono i valori $c_1 = -2.300\,871$ e $c_2 = 2.999\,230$. La funzione esponenziale cercata è

$$d = ae^{bt}$$

con

$$a = e^{c_1} = 0.100\,172 \quad b = c_2 = 2.999\,230$$

cioè $d = 0.100e^{3.00t}$, equazione che rappresenta praticamente lo stesso risultato ottenuto riportando i dati in un diagramma semilogaritmico e tracciando una linea retta fra i punti-dato così ottenuti (v. il problema 3.2).

La funzione esponenziale è riportata in grafico, unitamente ai punti-dato, in fig. 4-15.

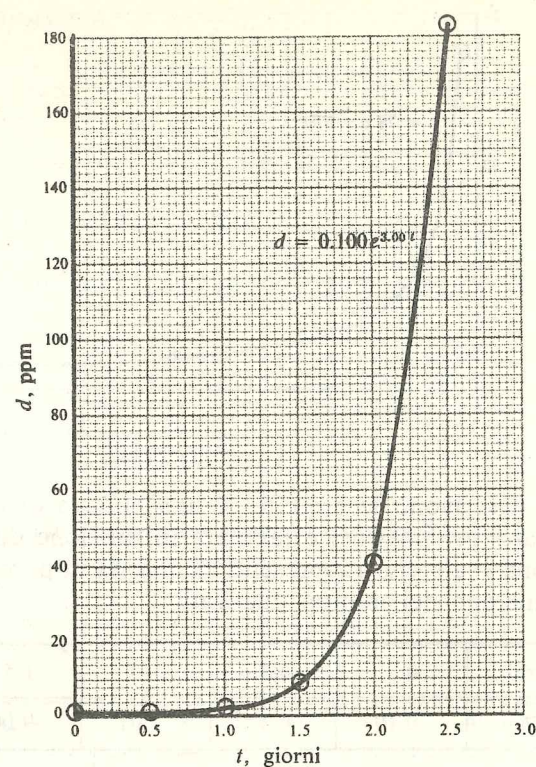


Fig. 4-15

4.22. Interpolare una curva quadratica sul seguente gruppo di dati, facendo uso del metodo dei minimi quadrati.

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5
y	1.8	3.2	5.5	8.0	12.5	15.9	22.6	28.7	35.5	48.4

L'equazione quadratica che interpolerà i punti-dato è del tipo

$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2$$

Le equazioni dei minimi quadrati per c_1 , c_2 e c_3 si ottengono dal par. 4.9, per il caso $n=2$. Con ciò:

$$\begin{aligned} Mc_1 + (\sum x_i)c_2 + (\sum x_i^2)c_3 &= \sum y_i \\ (\sum x_i)c_1 + (\sum x_i^2)c_2 + (\sum x_i^3)c_3 &= \sum x_i y_i \\ (\sum x_i^2)c_1 + (\sum x_i^3)c_2 + (\sum x_i^4)c_3 &= \sum x_i^2 y_i \end{aligned}$$

Qui è $M = 10$ ed i coefficienti rimanenti si calcolano come in tab. 4-11.

Le equazioni dei minimi quadrati si possono scrivere ora nella forma

$$\begin{aligned} 10c_1 + 22.5c_2 + 71.25c_3 &= 182.1 \\ 22.5c_1 + 71.25c_2 + 253.125c_3 &= 611.9 \\ 71.25c_1 + 253.125c_2 + 958.3125c_3 &= 2276.75 \end{aligned}$$

La soluzione di queste tre equazioni simultanee è

$$c_1 = 2.47273 \quad c_2 = 0.32515 \quad c_3 = 2.10606$$

Quindi l'equazione quadratica cercata è

$$y = 2.47273 + 0.32515x + 2.10606x^2$$

Tabella 4-11

x	x ²	x ³	x ⁴	y	xy	x ² y
0	0	0	0	1.8	0	0
0.5	0.25	0.125	0.0625	3.2	1.6	0.8
1.0	1.00	1.000	1.0000	5.5	5.5	5.5
1.5	2.25	3.375	5.0625	8.0	12.0	18.0
2.0	4.00	8.000	16.0000	12.5	25.0	50.0
2.5	6.25	15.625	39.0625	15.9	39.75	99.375
3.0	9.00	27.000	81.0000	22.6	67.80	203.400
3.5	12.25	42.875	150.0625	28.7	100.45	351.575
4.0	16.00	64.000	256.0000	35.5	142.00	568.000
4.5	20.25	91.125	410.0625	48.4	217.80	980.100
Totali	22.5	71.25	253.125	182.1	611.90	2276.750

4.23. Mostrare che il coefficiente di correlazione di un gruppo di punti-dato (x_i, y_i) è indipendente dalle unità di misura delle x_i e delle y_i .

Se si cambiano le unità delle x_i (per es. da piedi a metri), le x_i vengono sostituite dalle

$$x'_i = px_i$$

dove p è il corrispondente fattore di conversione fra le unità (per es. 0.3048 m/ft). Analogamente, $y'_i = qy_i$. Il coefficiente di correlazione dei punti-dato (x'_i, y'_i) è allora

$$\begin{aligned} r' &= \frac{M \sum x'_i y'_i - (\sum x'_i)(\sum y'_i)}{\{[M \sum x'^2_i - (\sum x'_i)^2][M \sum y'^2_i - (\sum y'_i)^2]\}^{1/2}} \\ &= \frac{Mpq \sum x_i y_i - (p \sum x_i)(q \sum y_i)}{\{[Mp^2 \sum x^2_i - (p \sum x_i)^2][Mq^2 \sum y^2_i - (q \sum y_i)^2]\}^{1/2}} \\ &= \frac{pq}{pq} \frac{M \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{\{[M \sum x^2_i - (\sum x_i)^2][M \sum y^2_i - (\sum y_i)^2]\}^{1/2}} = r \end{aligned}$$

dove r è il coefficiente di correlazione dei punti-dato (x_i, y_i) .

Si può dimostrare che il risultato precedente vale anche quando il cambiamento delle unità implica un cambiamento dell'origine delle scale (per es. nella conversione da °F a °C).

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

Risposte alla maggior parte dei problemi sono fornite alla fine del libro.

4.24. Un voltmetro ha una scala che varia da 0 a 500 V. La scala è suddivisa in intervalli di 10 V. (a) Se la posizione dell'ago dello strumento si può individuare a meno di mezzo intervallo, quale sarà l'incertezza associata alle misure col voltmetro dotato di una simile scala? (b) Supponiamo che l'ago si trovi pressoché a metà strada fra le divisioni 170 e 180 V della scala. Quale lettura di tensione dovrebbe essere accettata, se l'incertezza nella misura deve cadere sull'ultima cifra significativa? (c) Come dovrebbe venire registrata la misura considerata in (b), se l'incertezza nella misura deve venire specificata insieme col valore misurato? (d) Quale tensione dovrebbe venire registrata, se l'ago indica approssimativamente la divisione di 340 V? (e) Quale tensione dovrebbe venire registrata se l'ago del voltmetro segna 60 V?

4.25. Un flussimetro ha una scala che si estende da 0 a 100 m³/min. La scala è suddivisa in intervalli di 5 m³/min. (a) Supponiamo che la posizione dell'ago dello strumento possa essere determinata con un'approssimazione di metà intervallo. Quale sarà la sensibilità del flussimetro? (b) Quale portata dovrebbe venire registrata quando l'ago è in prossimità della suddivisione 65 m³/min? (c) Quale portata dovrebbe venire registrata quando l'ago è fermo a metà via circa fra le divisioni della scala 20 e 25 m³/min? (d) Quale portata dovrebbe venire registrata se l'ago è posto approssimativamente a metà strada fra le divisioni 75 ed 80 m³/min?

4.26. I seguenti dati indicano il punto di ebollizione (b.p.) di una miscela di alcool e di acqua in funzione della concentrazione dell'alcool (x).

x, %	1	2	4	6	8	10	15	20	25	30	40	50
b.p., °C	102	99.5	97.5	96.5	94	92.5	90.5	89.5	88	86	85.5	83.5

Riportare in grafico i dati e stabilire: (a) se sono presenti nei dati errori sistematici, (b) se vi sono errori casuali, (c) come si possano ottenere valori più precisi se i dati risultano affetti da errori.

4.27. Si sono fatte diverse misure del punto di congelamento di una soluzione salina al 5%, ottenendo i seguenti valori: -3.08, -2.90, -2.94, -3.05, -2.97, -3.14, e -3.02 °C. (a) Qual è il valore medio ottenuto per il punto di congelamento? Questo valore coincide con qualcuna delle singole misure? (b) Determinare le deviazioni dal valor medio, con la precisione di due decimali. (c) Supponiamo di scartare come errate quelle misure le cui deviazioni superino in valore assoluto il decimo di °C. In che misura questo influirà sul valore medio del punto di congelamento?

4.28. Uno studente ha effettuato un'esperienza per determinare di quanto deve venire allungata una molla affinché la forza di richiamo risulti di 10 N. Si sono ottenute le misure seguenti: 12.2, 11.7, 12.4, 12.0, 10.4, 11.9, e 12.4 cm. (a) Qual è il valore medio di queste misure? (b) Calcolare le deviazioni rispetto al valore medio. (c) Supponiamo di scartare come errate quelle misure le cui deviazioni siano maggiori, in valore assoluto, di 1 cm. In che misura ciò influirà sul valore medio? (d) Ricalcolare le deviazioni delle restanti misure rispetto al nuovo valore medio.

4.29. Uno studente ha determinato sperimentalmente l'accelerazione di gravità terrestre ottenendo un valore pari a 9.819 m/s² (al livello del mare e ad una latitudine di 45°). Il valore corretto, come è noto, è 9.807 m/s². Valutare: (a) l'errore assoluto, (b) l'errore relativo, (c) l'errore percentuale.

4.30. Un motociclista ha riscontrato che il suo tachimetro sbaglia in eccesso del 3%. Valutare le velocità corrette che corrispondono a letture del tachimetro pari ad (a) 30 mph, (b) 55 mph, (c) 80 mph.

4.31. Uno studente di ingegneria ha acquistato una scatola di caramelle da 1 lb per la sua ragazza, pensando che siano le caramelle a pesare 1 lb. Prima di regalare le caramelle alla sua ragazza, lo studente ha trovato che la scatola sigillata pesava 465 grammi (notare che la scala era tarata in unità di massa). Successivamente egli pesò la scatola vuota e la carta in cui questa era avvolta e trovò che pesavano complessivamente 42 grammi. (a) Qual è l'errore percentuale sul peso delle caramelle? (b) Se la scatola di caramelle costa 6.50 dollari, qual è il prezzo delle caramelle pagato in più dallo studente?

4.32. Un condensatore ha una capacità nominale di 500 μF. (a) Se la capacità effettiva è 522 μF, qual è l'errore percentuale rispetto alla capacità di targa? (b) Se la precisione sulla capacità nominale è di ± 10%, entro quali limiti si può prevedere che cada la capacità effettiva?

4.33. Un metro di legno venne impiegato per misurare le dimensioni di un recipiente rettangolare. Le dimensioni misurate furono 1.275 × 1.886 × 6.351 « metri ». In un secondo tempo si trovò che la vera lunghezza del metro era di soli 99.35 centimetri. (a) Qual è il volume effettivo del recipiente? (b) Da quale errore percentuale è affetto il volume calcolato dalle misure originarie?

4.34. Un automobilista ha fatto un controllo della spesa di benzina per miglio della sua automobile registrando la lettura del contachilometri e la quantità di benzina necessaria a riempire il serbatoio ogni volta che egli si fermava per il rifornimento. Durante il mese di luglio ottenne i dati seguenti

Letture del contachilometri	Benzina acquistata
18 258 mi	16.4 gal
18 673	18.7
19 059	16.0
19 427	17.2
19 881	18.3
20 244	15.8
20 654	17.9

(a) In base a queste cifre, qual è la spesa di benzina per miglio complessiva per l'intero mese? (b) L'automobilista ha il sospetto che il suo contachilometri segni un 5% in più. Se questo è vero, quale sarà il vero costo per miglio di benzina per l'intero mese?

4.35. Si sono ottenute quattro misure della caduta di tensione attraverso una resistenza, il cui valore medio è risultato pari a 261.7 V. Successivamente, si sono ottenute due ulteriori misure, il cui valore è risultato rispettivamente pari a 257.4 V e a 259.0 V. Valutare un valore medio per tutte e sei le misure.

4.36. Si devono miscelare insieme due tipi diversi di carbone. Il primo tipo contiene il 6.4% di zolfo ed il secondo il 2.8%. (a) Quale sarà il contenuto di zolfo di una miscela consistente del 70% di carbone ad alto zolfo e del 30% di carbone a basso zolfo? (b) In quali quantità si devono miscelare i due tipi di carbone se si vuole che il contenuto di zolfo della miscela prodotta sia del 4.5%?

4.37. Due differenti gruppi di studenti hanno effettuato delle esperienze per determinare la pressione atmosferica ad un'altitudine di 8000 piedi sul livello del mare. Il primo gruppo ha ottenuto un valore medio pari a 557.8 mm Hg ed il secondo gruppo un valore medio di 562.6 mm Hg. Fu deciso di attribuire ai risultati conseguiti dal primo gruppo un peso doppio rispetto ai risultati del secondo gruppo. Quale dovrebbe essere il valore accettato per la pressione?

4.38. Uno studente di ingegneria ha scelto i seguenti corsi ed ha conseguito i seguenti voti durante il trimestre trascorso. Valutare la QPA dello studente (cfr. il problema 4.9), assumendo che A = 4, B = 3, ecc.

Corso	Ore di credito	Voto
Algebra lineare	3	B
Fisica II	4	A
Economia	3	C
Meccanica dei solidi	3	B
Elettronica	3	C
Laboratorio di elettronica	1	A

4.39. Al termine del suo anno come matricola una studentessa d'ingegneria ha preso 34 ore di crediti ed ha conseguito una QPA complessiva (corrispondente a tutti i corsi del primo anno) pari a 3.41. Durante il primo trimestre del suo secondo anno, la studentessa ha avuto 16 ore di crediti, per cui ha ottenuto una QPA di 3.23. Qual è la sua QPA complessiva?

4.40. La pagella di quattro anni accademici di uno studente è mostrata qui di seguito su una base trimestrale. Valutare la QPA complessiva dello studente.

Trimestre	1	2	3	4	5	6	7	8
Ore di credito	16	17	16	15	17	16	18	15
QPA	2.41	2.76	3.22	3.08	2.94	3.35	3.20	2.83

- 4.41. Valutare la media, la mediana, la moda (o le mode), la varianza e le deviazione standard per ciascuno dei seguenti gruppi di dati: (a) 8.2, 8.5, 7.6, 8.0, 7.4, 8.2, 7.8; (b) 137, 128, 117, 144, 160, 132, 155, 141; (c) 65.4, 64.7, 65.4, 67.2, 63.8, 66.9, 67.2, 66.1, 65.0; (d) -4.2, 5.9, 2.0, -3.6, -1.1, 3.9, 0.8.
- 4.42. Due gruppi di studenti hanno misurato il punto di snervamento di una lega metallica. I seguenti dati sono stati ottenuti da ciascun gruppo: 3865, 3407, 3620, 3883, 3571 N (gruppo A) e 3462, 3775, 3208, 3550, 3919, 3367, 3889 N (gruppo B). Quale gruppo di dati sembra essere più preciso, e perché?
- 4.43. In una piccola città vi sono sei aziende che impiegano ingegneri in numeri considerevoli. Viene qui indicato lo stipendio medio per ciascuna azienda. Determinare lo stipendio medio complessivo (su scala di città).

Azienda	Stipendio medio di un ingegnere	Numero di ingegneri impiegati
A	\$24 855	85
B	27 324	43
C	25 590	68
D	21 400	177
E	26 718	24
F	28 911	16

- 4.44. Quattro gruppi distinti di studenti hanno effettuato misure della resistenza di un'apparecchiatura elettrica. Sono stati ottenuti i seguenti risultati.

Gruppo	1	2	3	4
Resistenza media, Ω	77.2	67.7	74.6	78.0
Numero di misure	12	15		8

Se si è trovato un valore medio complessivo di 73.6 Ω , quante misure sono state effettuate dal gruppo 3?

- 4.45. Il gruppo di dati seguenti rappresenta i voti finali d'esame per una classe di 50 studenti d'ingegneria. Raggruppare i voti in intervalli di 5 punti percentuali, cioè 0.01-5, 5.01-10, 10.01-15, ..., 95.01-100. Calcolare la frequenza relativa per ciascun intervallo.

47	78	89	99	62	23	47	76	48	97
56	44	83	12	92	76	53	77	56	86
56	20	94	79	67	48	29	52	70	69
41	100	66	68	43	71	68	85	63	10
38	46	82	100	61	79	90	76	61	44

- 4.46. Calcolare la media e la deviazione standard (a) per i singoli voti d'esame e (b) per i dati raggruppati del problema 4.45.
- 4.47. Calcolare una distribuzione cumulativa dai dati raggruppati ottenuti nel problema 4.45.
- 4.48. Determinare il valore mediano per la distribuzione cumulativa ottenuta nel problema 4.47.
- 4.49. Determinare la media, la mediana e la deviazione standard per i dati presentati nel problema 3.4.

- 4.50. Determinare la media, la mediana e la deviazione standard per i dati presentati nella tab. 3-3.
- 4.51. Supponiamo che la distribuzione dei voti finali d'esame data nel problema 4.45 sia rappresentativa del rendimento di studenti di ingegneria del primo anno di anno in anno. In una classe di 100 studenti, quanti studenti si prevede che conseguano voti finali d'esame (a) inferiori o uguali a 35? (b) superiori ad 80? (c) superiori a 60, ma non superiori a 75? (Suggerimento: Utilizzare i dati della distribuzione cumulativa ottenuta nel problema 4.47.)
- 4.52. La fig. 4-16 presenta una curva di distribuzione cumulativa che indica la probabilità che una materia plastica contenga vari livelli di impurezze. Se questa curva di distribuzione è rappresentativa del processo di fabbricazione, trovare la probabilità che il livello di impurezze di una data partita di plastica sia (a) non superiore a 2.5 ppm, (b) superiore a 2.5 ppm, (c) non superiore a 5 ppm, (d) superiore a 5 ppm, (e) compreso fra 2.5 e 5 ppm, (f) compreso fra 3.5 e 4 ppm.

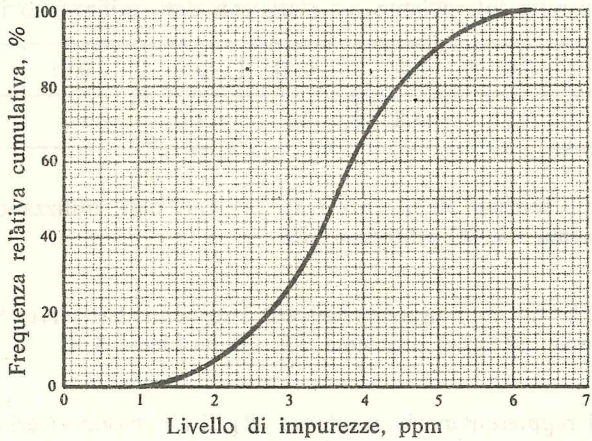


Fig. 4-16

- 4.53. In base alla fig. 4-16, (a) qual è il livello minimo di impurezze che può sempre essere ottenuto con questo processo di fabbricazione? (b) quale livello di impurezze è di fatto irrealizzabile con questo processo di fabbricazione?
- 4.54. In base ai dati presentati nella tab. 3-3, qual è la probabilità che un cilindro in un blocco motore abbia un diametro (a) compreso fra 89.7 ed 89.9 mm? (b) fra 90.1 e 90.5 mm? (c) minore o uguale ad 89.7 mm? (d) maggiore di 89.7 mm? (e) maggiore di 90.7 mm?
- 4.55. Determinare la media e la deviazione standard per le distribuzioni cumulative normali mostrate (a) in fig. 3-25, (b) in fig. 3-35. (Ricavare i valori richiesti dalla linea retta, e non dai punti-dato effettivi.)
- 4.56. Una distribuzione normale ha una media pari a 20 ed una deviazione standard di 5. Rappresentare (a) la curva normale in coordinate aritmetiche, utilizzando la formula per $f(x)$ data nel paragrafo 4.8 ovvero utilizzando i valori di $f(x)$ tabulati ricavati da un manuale; (b) la distribuzione cumulativa in un grafico di probabilità. Quale curva dà meglio un'idea del carattere fondamentale della distribuzione normale? Quale curva è più facile da costruire e da leggere?
- 4.57. Fare uso di un diagramma di probabilità per interpolare una distribuzione normale sui dati di distribuzione cumulativa ottenuti nel problema 4.47. Quali sono la media e la deviazione standard per la distribuzione normale? Fare un confronto con i valori ottenuti dai dati raggruppati [v. il problema 4.46(b)].
- 4.58. Determinare la mediana e la moda per la distribuzione normale ottenuta nel problema 4.57.

- 4.59. Che cosa accadrebbe ad una curva normale se (a) la media venisse aumentata o diminuita? (b) la deviazione standard venisse aumentata o diminuita?
- 4.60. Interpolare una linea retta fra i dati presentati nel problema 3.1, usando il metodo dei minimi quadrati.
- 4.61. I seguenti dati indicano il contenuto di zolfo (S) di un campione di carbone in funzione della sua densità (ρ). Determinare la retta di interpolazione dei dati col metodo dei minimi quadrati.

$\rho, 10^3 \text{ kg/m}^3$	1.30	1.35	1.40	1.45	1.50	1.60	1.80	2.00	2.20
S, %	0.85	1.02	1.23	1.47	1.77	2.58	3.46	4.40	5.51

- 4.62. Determinare la retta interpolante fra i seguenti dati, utilizzando il metodo dei minimi quadrati.

x	-0.03	-0.02	-0.01	0	0.01	0.02	0.03	0.04
y	6.2	4.8	2.5	1.0	-1.2	-2.7	-4.8	-6.9

- 4.63. Interpolare delle funzioni di potenze fra i seguenti dati, utilizzando il metodo dei minimi quadrati: (a) problema 3.3, (b) problema 3.29.
- 4.64. Interpolare delle funzioni esponenziali fra i seguenti dati servendosi del metodo dei minimi quadrati: (a) esempio 3.11, (b) problema 3.2, (c) problema 3.30.
- 4.65. I seguenti dati rappresentano la resistenza (R) di un reostato (resistore variabile) in funzione della posizione del cursore (x).

x	0	0.1	0.3	0.6	1.3	2.8	5.4	8.7	15.0	28.8
R, Ω	0	10	20	50	100	200	350	500	700	900

Trovare un'equazione in grado di interpolare i dati servendosi del metodo dei minimi quadrati. (Suggerimento: Riportare in grafico 1000-R in funzione di x.)

- 4.66. L'Elettronica ABC è una giovane compagnia in rapido sviluppo i cui profitti annuali (in azioni) sono i seguenti

Anno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Profitti, in dollari, per azione	0.01	0.02	0.02	0.03	0.03	0.04	0.06	0.09	0.24	0.38
Anno	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
Profitti, in dollari, per azione	0.63	0.93	1.24	1.48	1.73	2.07	2.50	3.12	3.48	

Utilizzare il metodo dei minimi quadrati per interpolare una curva fra i dati precedenti, scegliendo: (a) una funzione di potenze, (b) una funzione quadratica. (c) Quale curva fornisce la migliore interpolazione?

- 4.67. Per i dati del problema 4.62 calcolare le medie $\bar{x}$ ed $\bar{y}$ e mostrare che la retta dei minimi quadrati interpolata fra i dati passa per il punto $(\bar{x}, \bar{y})$. (Questo vale per qualsiasi linea dei minimi quadrati.)

- 4.68. Calcolare il coefficiente di correlazione per ciascuno dei seguenti gruppi di dati. Quale conclusione si può trarre in ciascun caso?

(a)

x	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
y	1.3	1.8	2.0	2.1	2.4	2.7	2.8	3.0	3.4	3.6

(b)

x	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
y	1.7	4.3	2.4	3.6	1.1	2.7	3.8	1.5	2.9	0.8

(c)

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
y	3.6	3.0	2.6	2.3	1.8	1.3	0.7	0.2	-0.2	-0.5	-1.3

CAPITOLO 5

Soluzioni approssimate di equazioni

Fra i molti problemi che si trova ad affrontare l'ingegnere, nessuno si presenta con maggior frequenza della necessità di risolvere varie specie di equazioni matematiche. In alcuni casi può essere necessario un computer, per ottenere una soluzione che sia la più rigorosa possibile; ciò accade particolarmente nella risoluzione di problemi di progetto dettagliati ovvero di problemi che riguardano il controllo automatico. Più spesso, tuttavia, risulta sufficiente una soluzione approssimata, con due o tre cifre significative. In queste circostanze, la sofisticazione implicata da una soluzione col computer non solo non è necessaria, ma può anche risultare non opportuna. Quello che si richiede in questi casi è la capacità di ottenere delle soluzioni approssimate rapidamente e con facilità, utilizzando al più un calcolatore tascabile e, forse, un foglio di carta millimetrata.

5.1 SOLUZIONE GRAFICA DI EQUAZIONI ALGEBRICHE

Un'equazione algebrica si dice *lineare* se contiene l'incognita elevata alla prima potenza soltanto; per esempio,

$$5x - 6 = 14$$

Equazioni di questo tipo si risolvono facilmente mediante manipolazioni algebriche direttamente applicabili all'equazione.

Molte delle equazioni che si incontrano nella scienza e nell'ingegneria sono però *non lineari*, in quanto includono termini in cui l'incognita è elevata a potenze diverse da uno ovvero contengono funzioni speciali dell'incognita. La maggior parte delle equazioni non lineari, per es.,

$$x^2 = 10 \cos x$$

non possono essere risolte mediante semplici manipolazioni algebriche.

Un modo facile di risolvere un'equazione non lineare è quello di trasformare l'equazione nella forma $f(x) = 0$ e di riportare in un grafico $f(x)$ in funzione di x . Uno dei punti in cui $f(x)$ interseca l'asse delle ascisse fornirà uno dei valori di x che rendono nulla $f(x)$. Questo valore di x sarà quindi una soluzione (più precisamente, una *radice reale*) dell'equazione. Il metodo porta a soluzioni precise fino a due o a tre cifre significative, il che è sufficiente per molti scopi dell'ingegneria.

Esempio 5.1. Trovare una radice positiva dell'equazione $x^2 = 10 \cos x$. Trasformiamo prima l'equazione nella forma $f(x) = 0$. Con ciò,

$$f(x) = x^2 - 10 \cos x = 0$$

Successivamente costruiamo una tabella di $f(x)$ in funzione di x , come la seguente.

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0
$f(x)$	-10	-8.526	-4.403	1.543	8.161

Questi calcoli rivelano che vi sarà una radice positiva in qualche punto compreso fra $x = 1.0$ ed $x = 1.5$. Tabuliamo allora un numero maggiore di valori in questo intervallo, come è sotto mostrato.

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
$f(x)$	-4.403	-3.326	-2.184	-0.985	0.260	1.543

Riportiamo ora $f(x)$ in funzione di x in un grafico, come è mostrato in fig. 5-1. Da questa figura si vede che $f(x)$ taglia l'asse delle x a circa $x = 1.38$. Così $x = 1.38$ è la radice cercata.

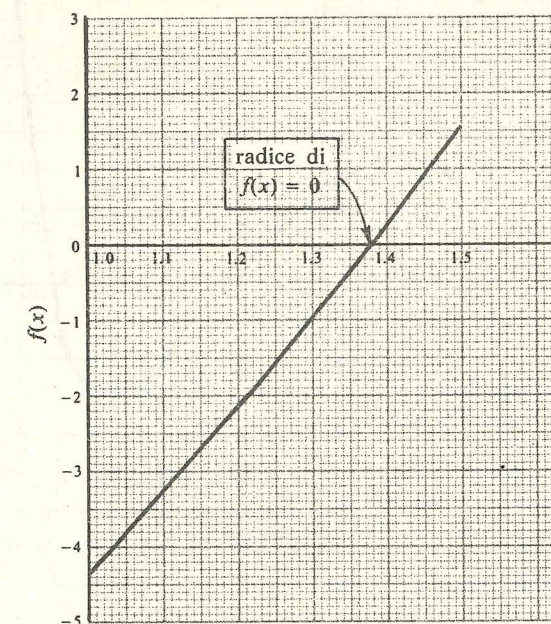


Fig. 5-1

Molte equazioni non lineari hanno più di una radice reale. Infatti certe equazioni che contengono termini trigonometrici hanno un numero *infinito* di radici reali.

Esempio 5.2. L'equazione $x \cos x = 0$ ha un numero infinito di radici reali nell'intervallo $x \geq 0$, poiché $\cos x = 0$ quando $x = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots$. Il primo membro dell'equazione sarà anche uguale a zero quando $x = 0$.

Per contro, alcune equazioni non lineari non hanno affatto delle radici reali (cioè tutte le radici saranno immaginarie o complesse). E' del tutto comune che un'equazione non lineare abbia sia radici reali sia radici complesse (o immaginarie).

Esempio 5.3. L'equazione polinomiale $x^3 - 3x^2 + 10x - 30 = 0$ può essere scritta in termini di fattori nella forma

$$(x - 3)(x^2 + 10) = 0$$

Le sue radici sono quindi $x = 3$, $x = \sqrt{10}i$, ed $x = -\sqrt{10}i$. Così, una radice è reale e due sono immaginarie.

Il procedimento grafico sopra illustrato può essere impiegato soltanto per trovare delle radici reali. Di solito ciò non è un problema, in quanto la maggior parte dei calcoli tecnici elementari riguarda soltanto le radici reali di un'equazione.

E' utile saper riconoscere situazioni che consentono più di una radice reale. Per un'equazione polinomiale, il numero totale di radici, reali e complesse, è uguale alla massima potenza dell'incognita. Le radici complesse si devono presentare a coppie. Quindi, se la potenza più elevata è dispari, l'equazione possiede un numero dispari di radici reali (e perciò, almeno una radice reale).

Esempio 5.4. L'equazione $f(x) = x^5 - 3x^4 - 3x^2 - 35x + 60 = 0$ ha almeno una radice reale, poiché la potenza più elevata di x è dispari. La fig. 5-2 mostra un grafico di $f(x)$ in funzione di x per l'intervallo $-4 \leq x \leq 4$. (Il diagramma si è ottenuto costruendo una tabella di $f(x)$ in funzione di x , come nell'esempio 5.1.) Da questa figura si vede che l'equazione ha tre radici reali comprese nel dato intervallo; e cioè $x = -2.2$, $x = 1.4$, ed $x = 3.6$. Non è difficile vedere che l'equazione non ha altre radici reali.

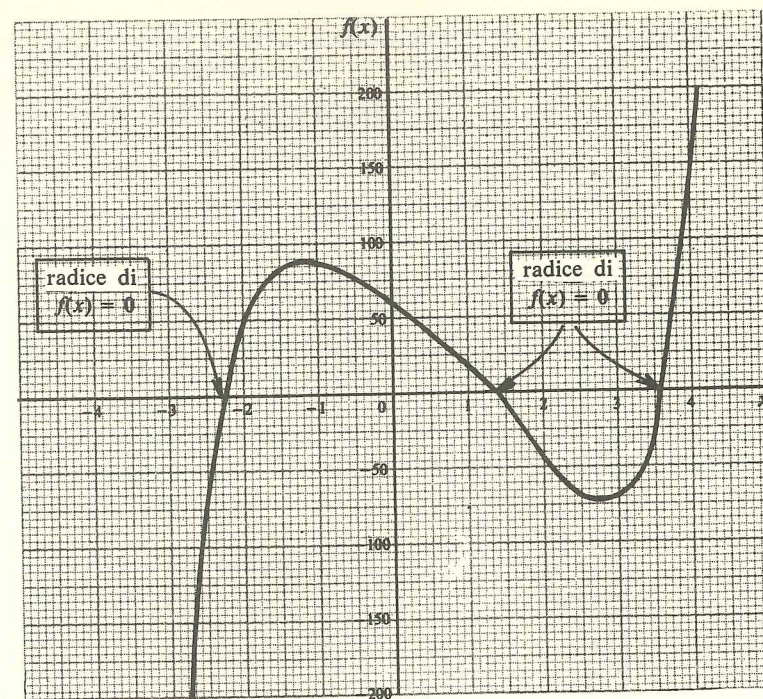


Fig. 5-2

5.2 SOLUZIONE NUMERICA DI EQUAZIONI ALGEBRICHE

Le equazioni algebriche non lineari possono essere risolte con un grado molto elevato di precisione mediante vari procedimenti di calcolo ideati a questo scopo. Questi metodi sono tutti basati sull'impiego di calcoli ripetuti con lo scopo di migliorare via via risultati precedenti. Ciascun calcolo successivo è detto un'iterazione; perciò questi metodi vengono talvolta chiamati *tecniche iterative*. Metodi di questo tipo possono risultare molto utili quando le soluzioni ottenute con i procedimenti grafici non sono sufficientemente precise.

Sostituzioni successive

Il metodo delle sostituzioni successive incomincia con una soluzione approssimata di un'equazione algebrica e gradualmente perfeziona quella soluzione attraverso una sequenza di calcoli del tipo *per tentativi*.

Per utilizzare questo metodo, si deve per prima cosa mettere l'equazione data nella forma

$$x = g(x)$$

Dopo di che si valuta orientativamente un valore della radice desiderata (potrà servire molto bene allo scopo una soluzione grafica approssimata). Indicheremo questo valore con x_0 . Si sostituisce quindi x_0 nel secondo membro dell'equazione e si calcola un nuovo valore di x , che verrà indicato con x_1 . In altre parole,

$$x_1 = g(x_0)$$

Questo procedimento è illustrato per via grafica in fig. 5-3(a).

Se il valore scelto per x_0 risultasse il valore esatto della radice, x_1 sarebbe uguale ad x_0 ed il calcolo avrebbe subito termine. È molto più probabile, tuttavia, che x_0 differisca alquanto dalla radice vera, per cui x_1 non sarà uguale ad x_0 . Si sostituisce allora x_1 nel secondo membro dell'equazione e si calcola ancora un nuovo valore di x , cioè

$$x_2 = g(x_1)$$

come è mostrato in fig. 5-3(b).

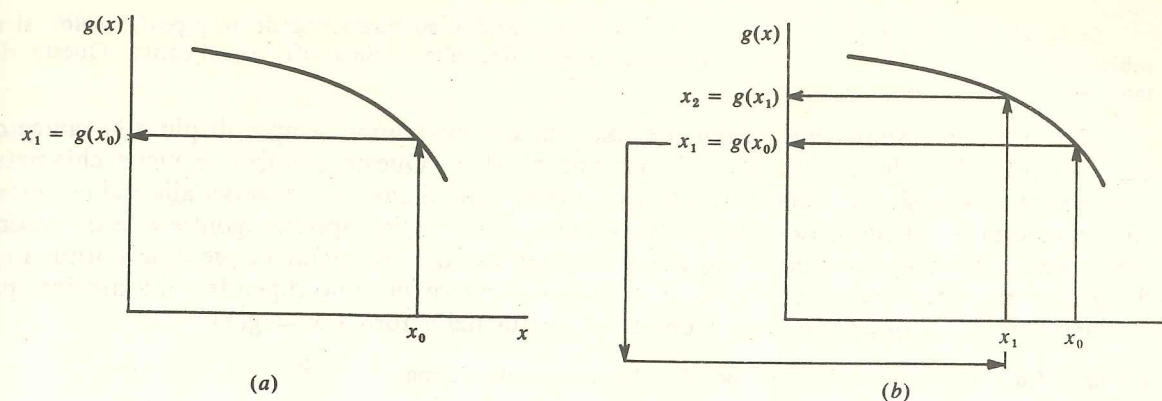


Fig. 5-3

Questo procedimento può venire ripetuto più volte, con l'impiego di un computer o di un calcolatore tascabile, fino a che non si ottengono due valori successivi di x sufficientemente prossimi l'uno all'altro.

In generale, possiamo scrivere $x_i = g(x_{i-1})$, dove x_{i-1} rappresenta il valore di x attualmente assunto ed x_i rappresenta il valore nuovamente calcolato. Ogni calcolo successivo rappresenta un'iterazione, come è illustrato in fig. 5-4.

Il calcolo sarà terminato quando la differenza fra x_{i-1} ed x_i (indipendentemente dal suo segno) risulterà minore di un qualche valore piccolo prefissato. Matematicamente, il criterio di arresto del calcolo può essere espresso con la

$$|x_i - x_{i-1}| \leq \epsilon$$

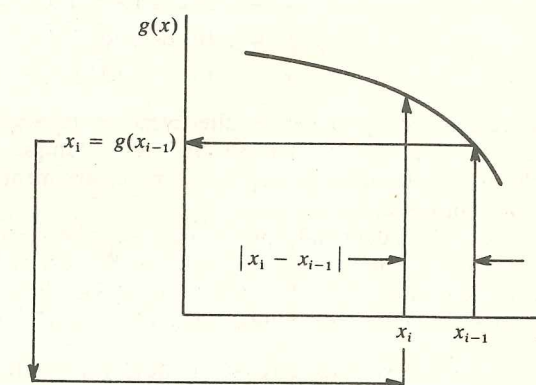


Fig. 5-4

dove ϵ rappresenta un numero positivo piccolo prestabilito. L'interpretazione grafica di questo criterio è mostrata in fig. 5-4.

Esempio 5.5. Risolvere l'equazione $x^2 = 10 \cos x$ rispetto ad una radice reale positiva. Utilizzare il metodo delle sostituzioni successive, con $\epsilon = 0.001$.

Per prima cosa trasformiamo l'equazione nella forma

$$x = \cos^{-1}(0.1x^2)$$

(v. l'esempio 5.6 per un'altra forma possibile.) Abbiamo già trovato che la radice è approssimativamente 1.4 (v. l'esempio 5.1). Quindi possiamo scegliere $x_0 = 1.4$ e scrivere

$$x_1 = \cos^{-1}[(0.1)(1.4)^2] = 1.373\,519$$

Applicando il criterio di arresto, si vede che

$$|x_1 - x_0| = |1.373\,519 - 1.4| = 0.026\,481$$

differenza che è maggiore di ϵ . Dobbiamo quindi effettuare ulteriori iterazioni, come di seguito viene indicato:

$$x_2 = \cos^{-1}[(0.1)(1.373\,519)^2] = 1.381\,003 \quad |x_2 - x_1| = 0.007\,484$$

$$x_3 = \cos^{-1}[(0.1)(1.381\,003)^2] = 1.378\,904 \quad |x_3 - x_2| = 0.002\,099$$

$$x_4 = \cos^{-1}[(0.1)(1.378\,904)^2] = 1.379\,494 \quad |x_4 - x_3| = 0.000\,590$$

Poiché

$$|x_4 - x_3| < 0.001$$

il criterio di arresto risulta a questo punto soddisfatto e si accetterà come soluzione finale il valore $x = 1.379\,494$.

Se il calcolo si fosse ulteriormente proseguito (in relazione ad una scelta di un ε più piccolo), si sarebbe ottenuto $x = 1.379\,365$, che è la risposta corretta fino alla settima cifra significativa. Questo risultato si ottiene dopo otto iterazioni.

Fin qui si è assunto che i valori calcolati di x si avvicinino sempre di più alla radice cercata nel procedere del calcolo da un'iterazione all'altra. Questa condizione viene chiamata *convergenza*. Non si può sempre assumere, tuttavia, che il calcolo converga alla radice cercata. In alcuni casi il calcolo potrà convergere verso un'altra radice oppure «gonfiarsi a dismisura», cioè i valori calcolati di x potranno non avvicinarsi affatto ad alcun valore. Quest'ultima condizione viene detta *divergenza*. Che le iterazioni convergano o no dipende dalla maniera particolare con cui l'equazione data viene trasformata nella forma $x = g(x)$.

Esempio 5.6. Trasformare l'equazione $x^2 = 10 \cos x$ nella forma

$$x = \sqrt{10 \cos x}$$

e quindi risolverla rispetto ad una radice reale positiva col metodo delle sostituzioni (iterazioni) successive con $\varepsilon = 0.001$ (v. l'esempio 5.5).

Se si parte ancora con $x_0 = 1.4$, si ottiene la seguente sequenza di calcoli:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{10 \cos 1.4} = 1.303\,714 & |x_1 - x_0| &= 0.096\,286 \\ x_2 &= \sqrt{10 \cos 1.303\,714} = 1.624\,555 & |x_2 - x_1| &= 0.320\,841 \\ x_3 &= \sqrt{10 \cos 1.624\,555} = \sqrt{-0.537\,327} \end{aligned}$$

Il calcolo non può venire ulteriormente proseguito senza coinvolgere numeri immaginari, il che va oltre lo scopo che qui ci interessa. Si arresta dunque il calcolo a questo punto. Si deve tenere presente, tuttavia, che il calcolo non convergerebbe necessariamente verso la risposta corretta, anche considerando l'aritmetica complessa.

Molti studenti alle prime armi sarebbero tentati ad ignorare il segno meno nell'ultimo calcolo ed a continuare semplicemente il calcolo. Se così si facesse (ed anche i segni meno successivi fossero ignorati), il calcolo convergerebbe ad $x = 3.161\,945$ dopo 7 iterazioni. Tuttavia questo valore *non* è una radice dell'equazione data (esso è una radice di $x^2 = 10 |\cos x|$).

Come si può dire se il metodo, applicato ad una particolare forma dell'equazione, $x = g(x)$, convergerà verso la radice desiderata, a patto che si incomincino le iterazioni con un valore di x_0 ragionevolmente vicino alla radice? La risposta a questa questione dipende da $g'(x)$, cioè dalla derivata prima della funzione $g(x)$. Infatti, il metodo convergerà se e soltanto se il valore assoluto di $g'(x)$ è minore di 1 in vicinanza della radice cercata. In forma matematica, il criterio di convergenza si può scrivere come

$$|g'(x)| < 1$$

(v. il problema 5.5 per la deduzione di questo criterio).

Esempio 5.7. Applicare il criterio di convergenza

$$|g'(x)| < 1$$

all'equazione $x^2 = 10 \cos x$. Fare il confronto con i risultati ottenuti negli esempi 5.5 e 5.6.

Nell'esempio 5.5, avevamo scritto $x = \cos^{-1}(0.1x^2)$, per cui

$$g(x) = \cos^{-1}(0.1x^2) \quad \text{e} \quad g'(x) = \frac{d}{dx} [\cos^{-1}(0.1x^2)] = -\frac{0.2x}{\sqrt{1 - 0.01x^4}}$$

Poiché la radice ha il valore $x = 1.379\,365$ (v. l'esempio 5.5), si ottiene

$$|g'(x)| = \frac{(0.2)(1.379\,365)}{\sqrt{1 - (0.01)(1.379\,365)^4}} = 0.28$$

Quindi $|g'(x)| < 1$, per cui il calcolo dovrebbe convergere. Ciò è consistente con i risultati ottenuti nell'esempio 5.5.

Nell'esempio 5.6, avevamo $x = \sqrt{10 \cos x}$, per cui

$$g(x) = \sqrt{10 \cos x} \quad \text{e} \quad g'(x) = \frac{d}{dx} \sqrt{10 \cos x} = -\frac{5 \sin x}{\sqrt{10 \cos x}}$$

Valutando questa funzione per $x = 1.379\,365$, si ottiene

$$|g'(x)| = \frac{5 \sin 1.379\,365}{\sqrt{10 \cos 1.379\,365}} = 3.56$$

Poiché $|g'(x)| > 1$, si vede che il calcolo in questo caso non convergerà.

Se $g(x)$ viene riportata in un grafico in funzione di x , vi è una semplice interpretazione grafica del criterio di convergenza: essa consiste nel fatto che in prossimità della radice cercata, il valore assoluto della pendenza della tangente alla curva $g(x)$ deve essere minore dell'unità.

Il metodo di Newton-Raphson

Il metodo di Newton-Raphson (noto anche come metodo di Newton) è semplicemente un caso speciale del metodo delle sostituzioni successive che, per molti problemi, converge molto rapidamente. In questo metodo, la funzione $g(x)$ è presa come

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

dove $f(x) = 0$ rappresenta l'equazione algebrica originaria. L'equazione iterativa $x_i = g(x_{i-1})$, diventa allora

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$$

Esempio 5.8. Risolvere l'equazione $x^2 = 10 \cos x$ rispetto ad una radice reale positiva utilizzando il metodo di Newton-Raphson. Scegliere $\varepsilon = 0.001$, come nell'esempio 5.5.

Scriviamo per prima cosa

$$f(x) = x^2 - 10 \cos x \quad \text{e} \quad f'(x) = 2x + 10 \sin x$$

Quindi

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - 10 \cos x}{2x + 10 \sin x} = \frac{x^2 + 10(x \sin x + \cos x)}{2x + 10 \sin x}$$

Partiamo con $x_0 = 1.4$, come nell'esempio 5.5. Sostituendo questo valore nella nostra espressione della $g(x)$, si ottiene

$$x_1 = \frac{(1.4)^2 + 10(1.4 \sin 1.4 + \cos 1.4)}{(2)(1.4) + 10 \sin 1.4} = 1.379\,428$$

Applicando il criterio di arresto, si vede che

$$|x_1 - x_0| = |1.379\,428 - 1.4| = 0.020\,572$$

valore maggiore di ε . Si effettua allora un'ulteriore iterazione.

$$x_2 = \frac{(1.379\,428)^2 + 10(1.379\,428 \sin 1.379\,428 + \cos 1.379\,428)}{(2)(1.379\,428) + 10 \sin 1.379\,428} = 1.379\,365 \quad |x_2 - x_1| = 0.000\,063$$

A questo punto, non soltanto risulta soddisfatto il criterio di arresto, ma si è anche ottenuta la risposta esatta $x = 1.379\,365$, con sette cifre significative. Soltanto due iterazioni sono state necessarie per ottenere questo risultato, mentre ne occorrevano otto nell'esempio 5.5. Per questo problema, il metodo di Newton-Raphson converge perciò molto rapidamente.

Il metodo di Newton-Raphson non può venire usato per risolvere ogni equazione algebrica; vi sono alcune equazioni per le quali esso non converge. In particolare, il metodo tende a divergere quando il valore di $f'(x)$ è prossimo allo zero (v. il problema 5.6). Tuttavia, l'impiego del metodo di Newton-Raphson viene generalmente raccomandato quando si desidera un tipo convergente di procedimento iterativo. Il metodo è particolarmente adatto per i calcoli mediante computer. (Discuteremo quest'ultimo punto con maggiori dettagli nel cap. 7).

Il metodo della bisezione (o di dimezzamento dell'intervallo)

Considereremo ora un approccio fondamentale diverso al problema di trovare una radice reale di un'equazione algebrica. Invece di tentare di calcolare un valore della radice stessa, riduciamo successivamente le dimensioni dell'intervallo che contiene la radice cercata. Una volta che si è ottenuto un intervallo sufficientemente piccolo, si può assumere con sicurezza che la radice dovrà cadere in una qualche opportuna posizione all'interno dell'intervallo.

Incominciamo col considerare un intervallo, $a \leq x \leq b$, in cui si sappia che è contenuta una e una soltanto delle radici reali dell'equazione $f(x)=0$. La funzione $f(x)$ taglierà quindi l'asse delle x una volta ed una volta soltanto entro l'intervallo, come è mostrato in fig. 5-5. Questo punto d'intersezione costituirà la radice cercata.

Possiamo trovare un intervallo più piccolo che contiene ancora la radice cercata mediante il semplice procedimento seguente. Si valuti $f(x)$ nel punto di mezzo dell'intervallo originario, cioè si calcoli $f(x_m)$, dove

$$x_m = \frac{a+b}{2}$$

Se la radice è contenuta nel semi-intervallo di sinistra ($a \leq x \leq x_m$), allora $f(a)$ ed $f(x_m)$ avranno segni differenti, mentre $f(x_m)$ ed $f(b)$ avranno lo stesso segno. D'altra parte, se la radice cade nel semi-intervallo di destra, $f(a)$ ed $f(x_m)$ avranno lo stesso segno, mentre $f(x_m)$ ed $f(b)$ avranno segni differenti. Così, confrontando i segni di $f(a)$, $f(x_m)$ ed $f(b)$, uno dei semi-intervalli può continuare ad essere preso in considerazione e l'altro scartato. Il calcolo può allora essere ripetuto col nuovo semi-intervallo.

Il procedimento è illustrato in fig. 5-6, dove sono effettuate due iterazioni successive. Dapprima si conserva il semi-intervallo di sinistra, come è mostrato nelle fig. 5-6(a) e (b), poi il semi-intervallo di destra, come è mostrato nelle figure 5-6(b) e (c). Inoltre la fig. 5-6(c) mette in evidenza che il semi-intervallo di destra si dovrà conservare ancora nella iterazione successiva.

Si osservi che noi continuiamo a riferirci al limite di sinistra come ad a , al limite di destra come a b , ed al punto di mezzo come ad x_m per ogni nuovo intervallo. Quindi il punto contrassegnato con x_m entro una data iterazione diventerà o il punto a o il punto b nell'iterazione successiva.

Si continua l'eliminazione di un semi-intervallo fino a che non si ottiene un intervallo le cui dimensioni siano minori di un qualche valore sufficientemente piccolo specificato. In altre parole, il

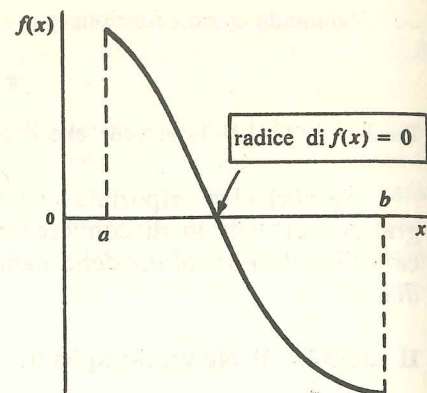


Fig. 5-5

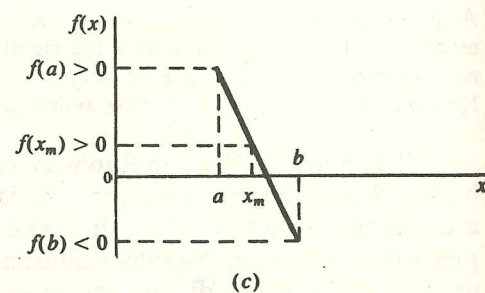
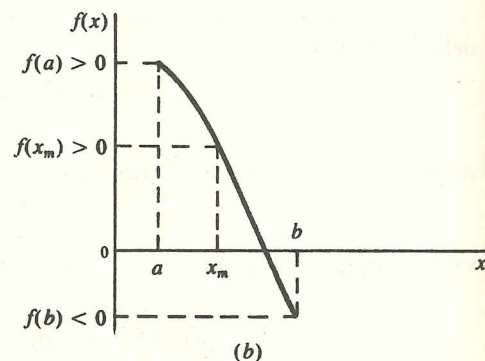
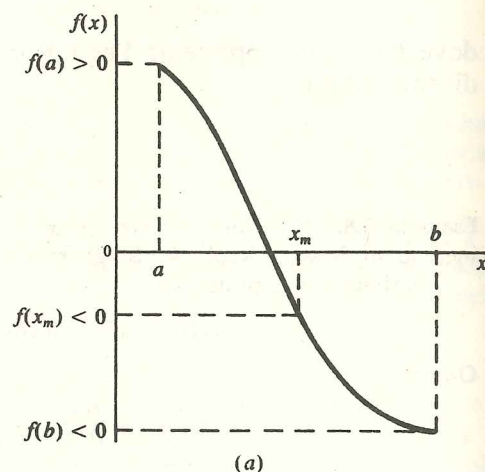


Fig. 5-6

calcolo ha termine una volta che risulti soddisfatta la condizione

$$|b - a| < \epsilon$$

La soluzione finale sarà allora il valore di x (cioè, a , b od x_m) per il quale il corrispondente valore di $f(x)$ è, in valore assoluto, il più piccolo.

Esempio 5.9. Risolvere l'equazione $x^2 = 10 \cos x$ rispetto ad una radice reale positiva contenuta entro l'intervallo $1 \leq x \leq 2$. Fare uso del metodo della bisezione, con $\epsilon = 0.001$.

Incominciamo con l'intervallo completo $1 \leq x \leq 2$. Per questo, la 1ª iterazione comporta i calcoli seguenti:

$$\begin{array}{lll} a = 1 & x_m = 1.5 & b = 2 \\ f(a) = -4.403 & f(x_m) = 1.543 & f(b) = 8.161 \end{array}$$

Si noti che $|b - a|$ supera ϵ . Si richiedono quindi ulteriori iterazioni, partendo con $1 \leq x \leq 1.5$.

2ª iterazione

$$\begin{array}{lll} a = 1 & x_m = 1.25 & b = 1.5 \\ f(a) = -4.403 & f(x_m) = -1.591 & f(b) = 1.543 \\ |b - a| = 0.5 \end{array}$$

3ª iterazione

$$\begin{array}{lll} a = 1.25 & x_m = 1.375 & b = 1.5 \\ f(a) = -1.591 & f(x_m) = -0.0549 & f(b) = 1.543 \\ |b - a| = 0.25 \end{array}$$

4ª iterazione

$$\begin{array}{lll} a = 1.375 & x_m = 1.4375 & b = 1.5 \\ f(a) = -0.0549 & f(x_m) = 0.737 & f(b) = 1.543 \\ |b - a| = 0.125 \end{array}$$

5ª iterazione

$$\begin{array}{lll} a = 1.375 & x_m = 1.40625 & b = 1.4375 \\ f(a) = -0.0549 & f(x_m) = 0.339 & f(b) = 0.737 \\ |b - a| = 0.0625 \end{array}$$

6ª iterazione

$$\begin{array}{lll} a = 1.375 & x_m = 1.39063 & b = 1.40625 \\ f(a) = -0.0549 & f(x_m) = 0.142 & f(b) = 0.339 \\ |b - a| = 0.03125 \end{array}$$

7ª iterazione

$$\begin{array}{lll} a = 1.375 & x_m = 1.38281 & b = 1.39063 \\ f(a) = -0.0549 & f(x_m) = 0.0434 & f(b) = 0.142 \\ |b - a| = 0.015625 \end{array}$$

8ª iterazione

$$\begin{array}{lll} a = 1.375 & x_m = 1.37891 & b = 1.38281 \\ f(a) = -0.0549 & f(x_m) = -0.00572 & f(b) = 0.0434 \\ |b - a| = 0.0078125 \end{array}$$

9ª iterazione

$$\begin{array}{lll} a = 1.37891 & x_m = 1.38086 & b = 1.38281 \\ f(a) = -0.00572 & f(x_m) = 0.0188 & f(b) = 0.0434 \\ |b - a| = 0.00390625 \end{array}$$

10ª iterazione

$$\begin{aligned} a &= 1.37891 & x_m &= 1.37989 & b &= 1.38086 \\ f(a) &= -0.00572 & f(x_m) &= 0.00661 & f(b) &= 0.0188 \\ |b - a| &= 0.001953125 \end{aligned}$$

11ª iterazione

$$\begin{aligned} a &= 1.37891 & x_m &= 1.37940 & b &= 1.37989 \\ f(a) &= -0.00572 & f(x_m) &= 0.000445 & f(b) &= 0.00661 \\ |b - a| &= 0.0009765625 \end{aligned}$$

Poiché $|b - a| < 0.001$ dopo l'11ª iterazione, il calcolo ha termine e la risposta finale si assume $x = 1.37940$, poiché

$$|f(x_m)| < |f(a)| < |f(b)|$$

Se avessimo proseguito il calcolo, avremmo ottenuto una soluzione finale $x = 1.379365$ dopo 17 iterazioni. E questo il valore corretto della radice, con 7 cifre significative. Tuttavia il valore $x = 1.37940$ rappresenta una soluzione con un errore inferiore allo 0.01%.

Nel precedente esempio si può vedere che il metodo della bisezione richiede un maggior numero di iterazioni dei metodi presentati in precedenza (v. gli esempi 5.5 e 5.8). Tuttavia il metodo della bisezione *non* fa uso di un procedimento per tentativi, che può convergere oppure non convergere. Di conseguenza la divergenza non costituisce qui un problema, ed è questo un vantaggio importante del metodo della bisezione in confronto con le tecniche precedenti.

Un'altra caratteristica interessante del metodo della bisezione è il fatto che si può determinare in *anticipo* quante iterazioni sono necessarie per ridurre l'intervallo a meno di una prescritta dimensione. Per la prima iterazione, l'intervallo sarà l'intervallo originario, di dimensioni $I_1 = |b - a|$. Quindi le dimensioni degli intervalli per la seconda, la terza, ..., l' n -esima iterazione saranno

$$I_2 = \frac{I_1}{2} \quad I_3 = \frac{I_2}{2} = \frac{I_1}{2^2} \quad \dots \quad I_n = \frac{I_1}{2^{n-1}}$$

Per arrestare il calcolo, I_n deve essere minore di ε , per cui

$$\frac{I_1}{2^{n-1}} < \varepsilon \quad \text{ovvero} \quad n > \frac{\log(I_1/\varepsilon)}{\log 2} + 1$$

Il più piccolo valore intero positivo di n che soddisfa a quest'ultima disuguaglianza sarà il numero di iterazioni richiesto.

Esempio 5.10. Per le condizioni dell'esempio 5.9,

$$\frac{\log(I_1/\varepsilon)}{\log 2} + 1 = \frac{\log[(2-1)/0.001]}{\log 2} + 1 = \frac{3}{0.301030} + 1 = 10.9658$$

Il più piccolo intero che supera questo valore è 11; quindi $n = 11$, come si è trovato nell'esempio 5.9.

5.3 SOLUZIONE DI EQUAZIONI LINEARI SIMULTANEE

Un sistema di equazioni algebriche lineari simultanee si può scrivere in forma generale nel modo seguente

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Le costanti $a_{11}, \dots, a_{nn}$ e $b_1, b_2, \dots, b_n$ si assumono note. Il nostro obiettivo è quello di risolvere le precedenti equazioni rispetto ai valori di $x_1, x_2, \dots, x_n$ che le soddisfano.

Metodo di eliminazione di Gauss-Jordan

Questo procedimento è molto più semplice e più efficace dei metodi più familiari basati sulla sostituzione algebrica diretta o sull'impiego dei determinanti. L'idea base è quella di scrivere per prima cosa le costanti date sotto forma di matrice

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

e quindi di trasformare questa matrice, riga per riga, fino a che tutte le a non diventino 0, ad eccezione degli elementi posti sulla *diagonale principale* (dall'elemento superiore di sinistra all'elemento inferiore di destra) che diventano 1. L'ultima colonna, che originariamente conteneva le b , conterrà allora i valori delle incognite x . In altre parole, la matrice originaria verrà trasformata nella seguente

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x_n \end{bmatrix}$$

Ciascuna trasformazione consiste nel sommare un qualche multiplo di una riga ad un'altra riga, in modo tale che si ottenga il risultato richiesto (uno 0 oppure un 1). Il procedimento può venire meglio illustrato in tutti i dettagli mediante un esempio.

Esempio 5.11. Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari simultanee utilizzando il metodo di Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Per prima cosa si esprime il dato sistema di equazioni in forma di matrice, cioè

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

La matrice viene poi trasformata nel seguente modo.

1. Si trasformi la *prima colonna* nella (1,0,0). Per fare questo,

(a) Si moltiplichi la prima riga per $-2/3$ e si sommi alla seconda riga. Si ottiene con ciò una *nuova seconda riga*:

$$0 \quad -7/3 \quad 5/3 \quad 1/3$$

(Va notato che il fattore moltiplicativo, $-2/3$, è scelto in modo da ottenere uno zero nella prima colonna della seconda riga, cioè in modo tale che $(-2/3)(3) + 2 = 0$.)

(b) Si moltiplichi la prima riga per $-1/3$ e si sommi alla terza riga, ottenendo così una *nuova terza riga*:

$$0 \quad 1/3 \quad -5/3 \quad -13/3$$

(Notare ancora che il moltiplicatore, $-1/3$, è scelto in modo da ottenere uno zero nella prima colonna della terza riga.)

(c) Si moltiplichi la prima riga per $1/3$, ottenendo una *nuova prima riga*:

$$1 \quad 2/3 \quad -1/3 \quad 4/3$$

(Il moltiplicatore, $1/3$, è scelto in modo da ottenere 1 nella prima colonna della prima riga.)

Come risultato di queste operazioni, la nostra matrice originaria è diventata

$$\begin{bmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 & 4/3 \\ 0 & -7/3 & 5/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & -5/3 & -13/3 \end{bmatrix}$$

2. Si trasformi la *seconda colonna* nella (0,1,0). Per ottenere ciò,
 (a) Si moltiplichi la seconda riga (della nuova matrice) per 2/7 e si sommi alla prima riga. Con ciò si ottiene una *nuova prima riga*:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1/7 & 10/7 \\ 0 & 0 & -10/7 & -30/7 \\ 0 & 1 & -5/7 & -1/7 \end{array}$$

- (b) Si moltiplichi la seconda riga per 1/7 e si sommi alla terza riga, ottenendo una *nuova terza riga*:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1/7 & 10/7 \\ 0 & 0 & -10/7 & -30/7 \\ 0 & 1 & -5/7 & -1/7 \end{array}$$

- (c) Si moltiplichi la seconda riga per $-3/7$, ottenendo una *nuova seconda riga*:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1/7 & 10/7 \\ 0 & 0 & -10/7 & -30/7 \\ 0 & 1 & -5/7 & -1/7 \end{array}$$

Con ciò la nostra matrice diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/7 & 10/7 \\ 0 & 1 & -5/7 & -1/7 \\ 0 & 0 & -10/7 & -30/7 \end{bmatrix}$$

3. Si trasformi la *terza colonna* nella (0,0,1). Per fare ciò,
 (a) Si moltiplichi la terza riga (della nuova matrice) per 1/10 e si sommi alla prima riga. Abbiamo ora una *nuova prima riga*:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5/7 & -1/7 \\ 0 & 0 & -10/7 & -30/7 \end{array}$$

- (b) Si moltiplichi la terza riga per $-1/2$ e si sommi alla seconda riga, col risultato di ottenere una *nuova seconda riga*:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -10/7 & -30/7 \end{array}$$

- (c) Si moltiplichi la terza riga per $-7/10$, ottenendo una *nuova terza riga*:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

La nostra matrice è ora diventata la

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

4. Si può ora leggere la soluzione direttamente dall'ultima colonna. Si ottiene così $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.
 È facile verificare che (1,2,3) sono le risposte corrette semplicemente sostituendo questi valori nelle tre equazioni originarie.

Metodo di eliminazione di Gauss

Una variante del metodo di Gauss-Jordan è il *metodo di eliminazione di Gauss*, nel quale la matrice originaria

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

viene trasformata nella

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} & d_n \end{bmatrix}$$

dove tutti gli elementi al di sotto della diagonale principale sono 0. Le x si ottengono allora dalle

$$\begin{aligned} x_n &= d_n/c_{nn} \\ x_{n-1} &= (d_{n-1} - c_{n-1,n}x_n)/c_{n-1,n-1} \\ x_{n-2} &= (d_{n-2} - c_{n-2,n-1}x_{n-1} - c_{n-2,n}x_n)/c_{n-2,n-2} \\ &\dots \\ x_1 &= (d_1 - c_{12}x_2 - c_{13}x_3 - \dots - c_{1n}x_n)/c_{11} \end{aligned}$$

Nelle successive trasformazioni ciascuno degli zeri si ottiene sommando un qualche multiplo di una riga ad un'altra, come nel metodo di Gauss-Jordan. I dettagli del procedimento sono illustrati nell'esempio seguente.

Esempio 5.12. Utilizzare il metodo di eliminazione di Gauss per risolvere il seguente sistema di equazioni (v. l'esempio 5.11):

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Scrivendo le equazioni in forma di matrice, si ottiene

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

La matrice viene ora trasformata nel seguente modo.

1. Si trasformi la *prima colonna* nella (3,0,0). Per fare questo,
 (a) Si moltiplichi la prima riga per $-2/3$ e si sommi alla seconda riga, ottenendo così una *nuova seconda riga*:

$$\begin{array}{cccc} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -7/3 & 5/3 & 1/3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{array}$$

- (b) Si moltiplichi la prima riga per $-1/3$ e si sommi alla terza riga, ottenendo una *nuova terza riga*:

$$\begin{array}{cccc} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -7/3 & 5/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & -5/3 & -13/3 \end{array}$$

La matrice originaria è così diventata

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -7/3 & 5/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & -5/3 & -13/3 \end{bmatrix}$$

2. Si trasformi la *seconda colonna* nella (2, $-7/3$, 0). Per fare ciò, si moltiplichi la seconda riga per 1/7 e si sommi alla terza riga, ottenendo una *nuova terza riga*:

$$\begin{array}{cccc} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -7/3 & 5/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & -10/7 & -30/7 \end{array}$$

La matrice si può ora scrivere

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -7/3 & 5/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & -10/7 & -30/7 \end{bmatrix}$$

per cui

$$\begin{aligned} c_{11} &= 3 & c_{12} &= 2 & c_{13} &= -1 & d_1 &= 4 \\ & & c_{22} &= -7/3 & c_{23} &= 5/3 & d_2 &= 1/3 \\ & & & & c_{33} &= -10/7 & d_3 &= -30/7 \end{aligned}$$

3. Si può ora risolvere rispetto ad x_3 , x_2 ed x_1 .

$$x_3 = d_3/c_{33} = (-30/7)/(-10/7) = 3$$

$$x_2 = (d_2 - c_{23}x_3)/c_{22} = [1/3 - (5/3)(3)]/(-7/3) = (-14/3)/(-7/3) = 2$$

$$x_1 = (d_1 - c_{12}x_2 - c_{13}x_3)/c_{11} = [4 - (2)(2) - (-1)(3)]/3 = 3/3 = 1$$

Questa è naturalmente la stessa soluzione ottenuta nell'esempio 5.11, dove lo stesso sistema di equazioni era stato risolto col metodo di Gauss-Jordan.

Sebbene il metodo di eliminazione di Gauss possa apparire più complicato del metodo di Gauss-Jordan, esso è in effetti più semplice, poiché è necessario un minor numero di calcoli. Inoltre con questo metodo si possono controllare più facilmente gli errori numerici. Perciò il metodo di eliminazione di Gauss è in genere preferito al metodo di eliminazione di Gauss-Jordan, specialmente quando si debbano risolvere grossi sistemi di equazioni mediante un computer.

Eliminazione degli zeri dalla diagonale principale

Sia il metodo di eliminazione di Gauss sia quello di Gauss-Jordan falliscono se nel corso del calcolo si viene ad avere uno zero sulla diagonale principale. Tuttavia questi zeri si possono facilmente eliminare mediante un opportuno scambio di righe. (Questo scambio non

avrà nessun effetto sulla soluzione finale, poiché esso equivale ad un semplice diverso rior-
dinamento delle equazioni). Il procedimento di calcolo si può poi continuare nella solita ma-
niera. (Si badi che le colonne non possono venire scambiate l'una con l'altra, poiché ciò al-
tererebbe il sistema di equazioni dato). Il procedimento è illustrato nell'esempio seguente.

Esempio 5.13. Risolvere il seguente sistema di equazioni col metodo di eliminazione di Gauss:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= -3 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 &= 4 \end{aligned}$$

La matrice iniziale è la

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Trasformiamo ora questa matrice nella maniera seguente.

1. Si trasformi la prima colonna nella (1,0,0). Per fare questo,

(a) Si moltiplichi la prima riga per -2 e si sommi alla seconda riga, ottenendo con ciò una nuova seconda riga:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(b) Si moltiplichi la prima riga per -1 e si sommi alla terza riga, ottenendo una nuova terza riga:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & -3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

La matrice originaria è ora diventata la

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & -3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

La seconda riga contiene uno zero sulla diagonale principale. Si può correggere questa situazione scambiando fra loro la seconda riga con la terza, col che si ottiene la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

(Notare che abbiamo ancora (1,0,0) nella prima colonna, come si desidera.)

2. In via ordinaria si dovrebbe trasformare la seconda colonna nella forma $(c_{12}, c_{22}, 0)$. In questo caso la trasformazione non è necessaria, in quanto la seconda colonna è già nella forma desiderata, per cui

$$\begin{aligned} c_{11} &= 1 & c_{12} &= 2 & c_{13} &= -2 & d_1 &= -3 \\ & & c_{22} &= -3 & c_{23} &= 2 & d_2 &= 7 \\ & & & & c_{33} &= 5 & d_3 &= 10 \end{aligned}$$

3. Risolvendo rispetto ad x_3 , x_2 ed x_1 , si ottiene

$$\begin{aligned} x_3 &= d_3/c_{33} = 10/5 = 2 \\ x_2 &= (d_2 - c_{23}x_3)/c_{22} = [7 - (2)(2)]/(-3) = (3)/(-3) = -1 \\ x_1 &= (d_1 - c_{12}x_2 - c_{13}x_3)/c_{11} = [-3 - (2)(-1) - (-2)(2)]/1 = 3/1 = 3 \end{aligned}$$

Si noti con quanta facilità lo zero sia stato eliminato dalla diagonale principale al punto 1 scambiando fra loro la seconda riga con la terza. Se non avessimo effettuato questo scambio, non saremmo stati in grado di continuare con i punti 2 e 3.

Prima di terminare questo paragrafo, vogliamo ancora sottolineare come i procedimenti di eliminazione qui presentati siano di gran lunga superiori ai più comuni metodi elementari, quali la sostituzione diretta o l'impiego dei determinanti. Vi sono due ragioni di ciò. La prima è che i procedimenti di eliminazione richiedono un minor numero di calcoli rispetto ai metodi elementari e risultano quindi più efficienti. Questa efficienza relativa aumenta in maniera molto rilevante all'aumentare delle dimensioni del problema; per grossi sistemi di equazioni,

i metodi di eliminazione sono enormemente più efficienti dei metodi più elementari. (Certi tipi di problemi di ingegneria sofisticati richiedono la risoluzione di migliaia di equazioni algebriche lineari simultanee. Questi problemi vengono sempre risolti mediante elaboratori elettronici, spesso utilizzando i metodi di eliminazione di Gauss o di Gauss-Jordan).

I metodi di eliminazione sono inoltre più precisi dei metodi di risoluzione elementari, poiché questi ultimi richiedono spesso il calcolo di differenze fra numeri pressoché uguali. Calcoli di questo tipo possono essere molto poco precisi. Inoltre queste imprecisioni si possono sommare fra loro, col risultato di ottenere soluzioni prive di significato. I metodi di eliminazione sono molto meno soggetti a questo tipo di difficoltà.

5.4 INTEGRAZIONE GRAFICA

Molti problemi tecnici richiedono la valutazione di un integrale. Alcuni di questi problemi si possono risolvere mediante le tecniche di integrazione standard acquisite nell'analisi matematica. D'altra parte, vi sono certi problemi di integrazione a cui non si possono applicare i metodi consueti. In particolare, i metodi di integrazione standard non si possono utilizzare se l'integrando (cioè la funzione che deve essere integrata) è espresso in forma grafica o numerica, anziché in forma analitica. In queste situazioni può risultare molto utile l'integrazione grafica.

Al fine di valutare l'integrale

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

per via grafica, l'integrando, $f(x)$, deve venire riportato in grafico in funzione della variabile indipendente x , nell'intervallo $a \leq x \leq b$. L'area sottesa alla curva viene poi accuratamente misurata: il valore cercato di I sarà uguale a questa area.

Una maniera per determinare l'area sottesa ad una curva irregolare è quella di approssimare l'area effettiva con un certo numero di piccoli rettangoli adiacenti. L'area di ciascun rettangolo si può calcolare facilmente (area = lunghezza $\times$ larghezza), e le varie aree vengono poi sommate. Si otterrà un risultato ragionevolmente preciso (a due o a tre cifre significative) se si fa uso di un numero sufficientemente grande di rettangoli piuttosto stretti. Questo metodo è noto come la *regola dei trapezi* (o di Bezout).

Esempio 5.14. Valutare l'integrale

$$I = \int_0^1 x^2 dx$$

facendo uso sia dei metodi di integrazione standard sia del metodo grafico. Fare il confronto fra i risultati ottenuti utilizzando i due metodi.

Questo integrale può, naturalmente, essere valutato utilizzando i metodi d'integrazione standard dell'analisi matematica.

$$I = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} (1 - 0) = \frac{1}{3}$$

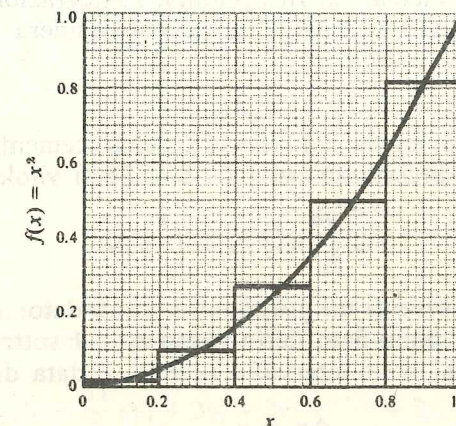


Fig. 5-7

La fig. 5-7 mostra un diagramma di $f(x)$ in funzione di x che può venire utilizzato nell'integrazione grafica. Si vede che l'intervallo totale $0 \leq x \leq 1$ è stato suddiviso in 5 sotto-intervalli, ciascuno di ampiezza $\Delta x = 0.20$. L'altezza di ciascun rettangolo è stata scelta in maniera tale che l'area *al di sotto della curva ma al di sopra del rettangolo* (sul lato destro del sotto-intervallo) sia pressoché la stessa dell'area *al di sopra della curva ma al di sotto del rettangolo* (nella parte di sinistra del sotto-intervallo). Nella tab. 5-1 sono date le dimensioni e l'area di ciascun rettangolo.

Tabella 5-1

Sotto-intervallo n.	Larghezza (Δx)	Altezza (h)	Area ($A = h \Delta x$)
1	0.20	0.02	0.004
2	0.20	0.10	0.020
3	0.20	0.27	0.054
4	0.20	0.50	0.100
5	0.20	0.82	0.164
Totale			0.342

Sommando le aree fra loro, si ottiene

$$I \approx A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 0.004 + 0.020 + 0.054 + 0.100 + 0.164 = 0.342$$

risultato che differisce dal valore vero, $I = 0.333$, per meno del 3%.

Una risposta più precisa si poteva ottenere suddividendo l'intervallo totale in un maggior numero di sotto-intervalli (per es. in 10 o 20 sotto-intervalli). Tuttavia, il risultato sopra ottenuto si può considerare sufficientemente preciso per molti scopi di ingegneria.

La regola dei trapezi non è il solo metodo disponibile per determinare l'area sottesa ad una curva irregolare. L'area può anche venire misurata direttamente con un *planimetro*, che è un tipo speciale di strumento tracciante realizzato a questo scopo. Un altro metodo ancora di determinare l'area è quello di disegnare la curva con precisione su carta millimetrata pesante, tagliare l'area con delle forbici e quindi pesarla. Questo peso viene poi messo a confronto con quello di un quadrato unitario (o di un qualche suo multiplo). Per la maggior parte delle applicazioni, tuttavia, la regola dei trapezi potrà essere considerata accettabile. Se si richiede una maggiore precisione, si sceglie solitamente un opportuno procedimento numerico (discusso nel prossimo paragrafo), piuttosto che ricorrere ad una più elaborata tecnica d'integrazione grafica.

5.5 INTEGRAZIONE NUMERICA

L'integrazione numerica è molto utile se un integrando è espresso sotto forma di tabella, oppure se l'integrando è una funzione che non può venire integrata mediante i procedimenti standard acquisiti nell'analisi matematica. In aggiunta, l'integrazione numerica viene utilizzata talvolta in luogo dell'integrazione grafica quando si desidera un risultato più preciso.

Regola dei trapezi

La versione numerica della regola dei trapezi è semplicemente una forma algebrica del metodo di integrazione grafica presentato nel par. 5.4. Se si vuole valutare l'integrale

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b y dx$$

con questo metodo, si deve disporre di un gruppo di n punti-dato: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, dove $x_1 = a$ ed $x_n = b$. Questi punti-dato definiranno $n - 1$ sotto-intervalli rettangolari, la cui larghezza, con riferimento al sotto-intervallo i -esimo, è data da

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$$

L'altezza del rettangolo associato ad un sotto-intervallo può venire espressa come media aritmetica delle ordinate corrispondenti ai punti estremi del sotto-intervallo, cioè come

$$\bar{y}_i = \frac{y_i + y_{i+1}}{2}$$

(Si noti che la condizione di aree uguali *non* sarà in generale soddisfatta). L'area del rettangolo è quindi

$$A_i = \bar{y}_i \Delta x_i = \frac{(y_i + y_{i+1})(x_{i+1} - x_i)}{2}$$

Queste relazioni sono illustrate in fig. 5-8. L'integrale dato può ora venire espresso nella forma

$$I = \int_a^b y dx \approx \sum_{i=1}^{n-1} A_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (y_i + y_{i+1})(x_{i+1} - x_i)$$

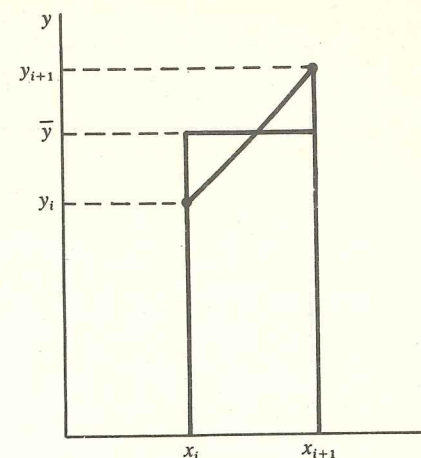


Fig. 5-8

Esempio 5.15. La corrente che attraversa un induttore elettrico può essere determinata mediante l'equazione

$$i = \frac{1}{L} \int_0^t v dt$$

dove
 i = corrente, A
 L = induttanza, H
 v = tensione, V
 t = tempo, s

Supponiamo che una corrente di 2.15 A venga immessa nell'induttore per un periodo di 500 millisecondi. La variazione di tensione nel tempo durante questo periodo è riportata nella tabella seguente. Determinare il valore dell'induttanza, facendo uso dell'equazione precedente.

t , ms	0	5	10	20	30	40	50	60	70	80
v , V	0	12	19	30	38	45	49	50	49	47
t	90	100	120	140	160	180	230	280	380	500
v	45	42	36	33	30	27	21	16	9	4

Al fine di valutare L nell'equazione sopra riportata, si deve prima valutare l'integrale

$$I = \int_0^t v dt$$

Se si fa uso della regola dei trapezi, si avranno 19 intervalli (poiché vi sono 20 punti-dato), con le proprietà mostrate nella tab. 5-2. (Si noti che $\bar{v}_1 = (0 + 12)/2 = 6$ V, $\bar{v}_2 = (12 + 19)/2 = 15.5$ V, ecc.) Con ciò,

$$I \approx \sum_{i=1}^{19} \bar{v}_i \Delta t_i = 10.7675 \text{ V} \cdot \text{s}$$

Si può ora sostituire questo valore nell'equazione sopra data e risolverla rispetto ad L , ottenendo così

$$L = \frac{1}{i} \int_0^t v dt \approx \frac{10.7675}{2.15} = 5 \text{ H}$$

Se i valori x_i sono *ugualmente distanziati* (cioè sono alla stessa distanza l'uno dall'altro), la regola dei trapezi assume una forma particolarmente semplice; infatti,

$$I = \int_a^b y dx \approx \frac{\Delta x}{2} (y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \dots + 2y_{n-2} + 2y_{n-1} + y_n)$$

Tabella 5-2

Intervallo n.	Larghezza, Δt (s)	Altezza, $\bar{v}$ (V)	Area, $\bar{v} \Delta t$ (V · s)
1	0.005	6.0	0.030
2	0.005	15.5	0.0775
3	0.01	24.5	0.245
4	0.01	34.0	0.340
5	0.01	41.5	0.415
6	0.01	47.0	0.470
7	0.01	49.5	0.495
8	0.01	49.5	0.495
9	0.01	48.0	0.480
10	0.01	46.0	0.460
11	0.01	43.5	0.435
12	0.02	39.0	0.780
13	0.02	34.5	0.690
14	0.02	31.5	0.630
15	0.02	28.5	0.570
16	0.05	24.0	1.200
17	0.05	18.5	0.925
18	0.10	12.5	1.250
19	0.12	6.5	0.780
Totale			10.7675

ovvero

$$I \approx \Delta x \left(\frac{y_1 + y_n}{2} + \sum_{i=2}^{n-1} y_i \right)$$

dove Δx è l'ampiezza di ciascun sotto-intervallo. In questa forma la regola dei trapezi è particolarmente facile da applicare.

Esempio 5.16. Valutare l'integrale

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

utilizzando la regola dei trapezi con 10 sotto-intervalli uguali.

Poiché vi debbono essere 10 sotto-intervalli, si richiederanno $n = 11$ punti-dato. Si costruisce così la tab. 5-3.

Tabella 5-3

i	x_i	y_i
1	0	1.000
2	0.1	0.990
3	0.2	0.961
4	0.3	0.914
5	0.4	0.852
6	0.5	0.779
7	0.6	0.698
8	0.7	0.613
9	0.8	0.527
10	0.9	0.445
11	1.0	0.368

Ciascuno dei valori della y successivi al primo è stato valutato con un calcolatore elettronico. Dalla tabella si ha

$$\sum_{i=2}^{n-1} y_i = 6.779$$

Poiché $\Delta x = (1-0)/10 = 0.10$, si può ora valutare l'integrale con la

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx \approx (0.10) \left(\frac{1.000 + 0.368}{2} + 6.779 \right) = 0.7463$$

Il valore corretto, a quattro cifre significative, è 0.7468. Perciò l'errore del valore approssimato è minore dello 0.1%.

Va sottolineato che questo particolare integrale *non può* essere valutato con i metodi standard dell'analisi matematica. Tuttavia l'integrale è stato valutato per via numerica con un alto grado di precisione, e valori tabulati di questo integrale sono disponibili in molti testi e manuali.

La regola di Simpson

La *regola di Simpson* è un metodo di integrazione numerica molto noto che combina insieme semplicità e precisione. Questo metodo è simile alla regola dei trapezi, nel senso che esso approssima un'area irregolare con un certo numero di sotto-aree di geometria nota. Anziché erigere rettangoli su singoli intervalli, tuttavia, si traccia ora una curva polinomiale del secondo ordine (una parabola) attraverso ciascun gruppo successivo di tre punti-dato adiacenti e ad uguale distanza l'uno dall'altro, come è indicato in fig. 5-9. L'area sottesa a ciascuna curva polinomiale si può poi ottenere per integrazione diretta.

Se si ha un numero pari di sotto-intervalli uguali (cioè un numero dispari di punti-dato), l'uso ripetuto di questa approssimazione parabolica porta alla semplice espressione seguente:

$$I = \int_a^b y dx \approx \frac{\Delta x}{3} (y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 + 2y_5 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

Notare la maniera in cui i valori di y intermedi sono moltiplicati alternativamente per 4 e per 2.

Esempio 5.17. Valutare l'integrale

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

utilizzando la regola di Simpson con 10 sotto-intervalli uguali.

Questo integrale è stato già valutato nell'esempio 5.16 mediante la regola dei trapezi. La tab. 5-4 si può allora costruire a partire dai valori dati nella tab. 5-3. Poiché vi sono 10 sotto-intervalli, si sa che $\Delta x = 0.10$. Quindi, il valore dell'integrale può venire approssimato dalla

$$I \approx \frac{0.10}{3} (1.000 + 14.964 + 6.076 + 0.368) = 0.7469$$

La risposta corretta, a quattro cifre significative, è 0.7468.

Ricordando che si era ottenuto un valore di 0.7463 nell'esempio 5.16 con la regola dei trapezi, si vede così che la regola di Simpson fornisce una risposta più precisa, con uno sforzo di calcolo addizionale invero molto piccolo.

Quando risulta applicabile, la regola di Simpson è in genere preferita alla regola dei trapezi. Ciò vale specialmente quando si fa uso di un calcolatore elettronico o di un computer. La ragione di ciò è che le soluzioni ottenute con la regola di Simpson sono più precise di quelle

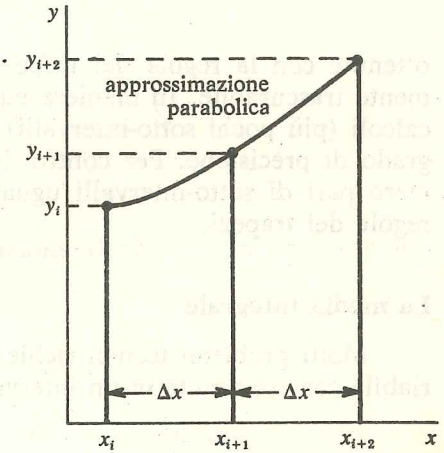


Fig. 5-9

Tabella 5-4

i	x_i	y_i	$4y_i$	$2y_i$
1	0	1.000		
2	0.1	0.990	3.960	
3	0.2	0.961		1.922
4	0.3	0.914	3.656	
5	0.4	0.852		1.704
6	0.5	0.779	3.116	
7	0.6	0.698		1.396
8	0.7	0.613	2.452	
9	0.8	0.527		1.054
10	0.9	0.445	1.780	
11	1.0	0.368		
Totali			14.964	6.076

ottenute con la regola dei trapezi, mentre la differenza nell'impegno di calcolo è praticamente trascurabile. In maniera equivalente, la regola di Simpson richiede un minor numero di calcoli (più pochi sotto-intervalli) della regola dei trapezi per ottenere risposte con lo stesso grado di precisione. Per contro, la regola di Simpson è applicabile a problemi aventi un numero pari di sotto-intervalli uguali, mentre nessuna restrizione di questo tipo sussiste per la regola dei trapezi.

La media integrale

Molti problemi tecnici richiedono il calcolo di una media di una data funzione, $f(x)$, variabile con continuità in un intervallo $a \leq x \leq b$. Una simile media può venire definita come

$$\bar{f} \int_a^b dx = \int_a^b f(x) dx$$

$$\bar{f} = \frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b dx} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

ovvero dalla

La quantità $\bar{f}$ si dice *media integrale* della funzione $f(x)$ nell'intervallo $a \leq x \leq b$. Da tenere presente che la definizione della media integrale non ha nulla a che fare con la maniera con cui l'integrale viene valutato. In altri termini, una media integrale si può determinare per via analitica (facendo uso delle regole fondamentali dell'analisi matematica), per via grafica o per via numerica.

Esempio 5.18. Determinare un valore medio della tensione per i dati tensione-tempo presentati nell'esempio 5.15.

La tensione media si scrive

$$\bar{v} = \frac{1}{0.500-0} \int_0^t v dt$$

(Notare che il tempo è espresso in secondi anziché in millisecondi, e ciò per rendere il tutto consistente con le unità usate nel valutare l'integrale nell'esempio 5.15). L'integrale è già stato valutato per via numerica, ed il suo valore è risultato essere $I \approx 10.7675 \text{ V}\cdot\text{s}$. Quindi,

$$\bar{v} \approx \frac{10.7675}{0.500} = 21.535 \text{ V.}$$

PROBLEMI RISOLTI

5.1. Specificare se le seguenti equazioni algebriche sono lineari o non lineari.

(a) $12x = 20$ (b) $x^2 - 3x = 2$ (c) $x + \cos x = 1 + \sin x$

(a) lineare, (b) non lineare, (c) non lineare.

5.2. Determinare, per ciascuna delle equazioni presentate nel problema 5.1, se possono venire risolte esplicitamente rispetto ad x oppure no.

(a) $x = 5/3$

(b) Utilizzando la formula di risoluzione delle equazioni di secondo grado

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

si ottiene

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 8}}{2} = 3.562, -0.562$$

Quindi, $x_1 = 3.562$, $x_2 = -0.562$.

(c) Non può venire risolta esplicitamente rispetto ad x .

5.3. Un altro procedimento grafico per risolvere un'equazione algebrica non lineare è il seguente:

(1) Si trasformi l'equazione nella forma $x = g(x)$.

(2) Si portino in grafico le due equazioni

$$y = x \text{ (una linea retta)} \quad y = g(x) \text{ (una linea curva)}$$

(3) Qualsiasi valore di x per cui la curva e la retta si intersecano soddisferà l'equazione $x = g(x)$, e sarà quindi una radice dell'equazione data.

Fare uso di questo procedimento per risolvere la

$$x^2 = 10 \cos x \quad x > 0$$

(v. l'esempio 5.1).

Per prima cosa si trasforma l'equazione data nella forma $x = \sqrt{10 \cos x}$. Si riportano poi in diagramma le equazioni

$$y = x \quad y = \sqrt{10 \cos x}$$

come mostrato in fig. 5-10. Le due curve si intersecano per $x = 1.38$, che è dunque la radice cercata. (È questo lo stesso valore ottenuto nell'esempio 5.1.)

5.4. Riordinare l'equazione

$$x^5 - 3x^4 - 3x^2 - 35x + 60 = 0$$

nella forma $x = g(x)$.

Esistono modi differenti di riordinare l'equazione data nella forma desiderata, per es.

(a) $x = (x^5 - 3x^4 - 3x^2 + 60)/35$

(d) $x = [(3x^2 + 35x - 60)/(x - 3)]^{1/4}$

(b) $x = (3x^4 + 3x^2 + 35x - 60)^{1/5}$

(e) $x = 3 + 3x^{-2} + 35x^{-3} - 60x^{-4}$

(c) $x = [(x^5 - 3x^4 - 35x + 60)/3]^{1/2}$

(f) $x = [(35x - 60)/(x^3 - 3x^2 - 3)]^{1/2}$

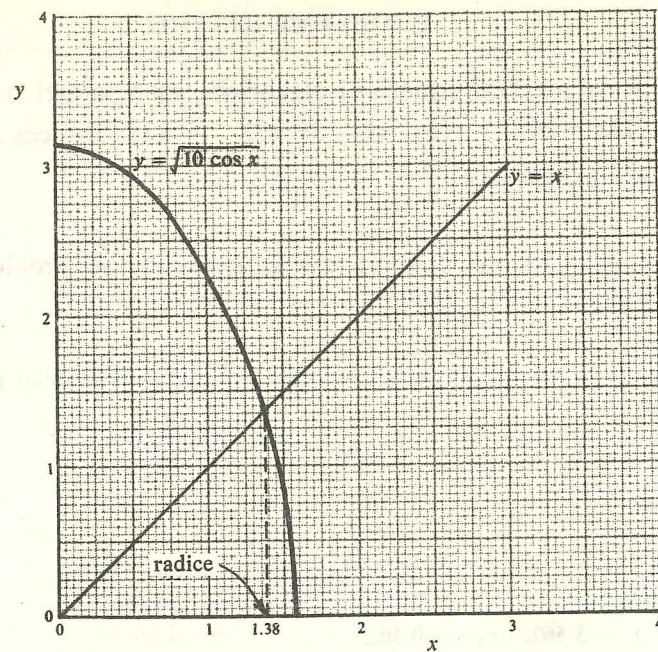


Fig. 5-10

5.5. Mostrare che il criterio di convergenza per il metodo delle sostituzioni successive è che risulti

$$|g'(\alpha)| < 1$$

dove α rappresenta la radice cercata dell'equazione $x = g(x)$.

La differenza fra l'approssimazione i -esima e la soluzione vera (il termine i -esimo di errore) si può scrivere come

$$e_i = x_i - \alpha = g(x_{i-1}) - g(\alpha)$$

Se si sviluppa $g(x_{i-1})$ in serie di Taylor nell'intorno del valore α , si ottiene

$$g(x_{i-1}) \approx g(\alpha) + g'(\alpha)(x_{i-1} - \alpha) = g(\alpha) + g'(\alpha) e_{i-1}$$

purche x_{i-1} sia sufficientemente prossimo ad α . Quindi

$$e_i = g(x_{i-1}) - g(\alpha) = g'(\alpha) e_{i-1}$$

Da quest'ultima equazione si può vedere che, se il valore di partenza x_0 non è troppo lontano da α ,

$$e_1 = g'(\alpha) e_0 \quad e_2 = g'(\alpha) e_1 = [g'(\alpha)]^2 e_0 \quad \dots \quad e_n = [g'(\alpha)]^n e_0$$

Affinché il metodo converga, si richieda che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = 0$$

Questa condizione sarà soddisfatta se e soltanto se

$$|g'(\alpha)| < 1$$

5.6. Mostrare che il criterio di convergenza per il metodo di Newton-Raphson è il seguente

$$\left| \frac{f(\alpha) f''(\alpha)}{[f'(\alpha)]^2} \right| < 1$$

dove α rappresenta la radice cercata dell'equazione $f(x) = 0$.

Si ricordi che il metodo di Newton-Raphson è un caso speciale del metodo delle sostituzioni successive, cioè

$$x_i = g(x_{i-1}) = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$$

Si è già visto che il criterio di convergenza per il metodo delle sostituzioni successive è

$$|g'(\alpha)| < 1$$

Perciò il criterio di convergenza per il metodo di Newton-Raphson deve essere

$$\left| \frac{d}{dx} \left[x - \frac{f(x)}{f'(x)} \right] \right|_{x=\alpha} < 1$$

Eseguendo la derivata, si ottiene

$$\left| \frac{f(\alpha) f''(\alpha)}{[f'(\alpha)]^2} \right| < 1$$

5.7. Risolvere il seguente sistema di equazioni facendo uso del metodo di eliminazione di Gauss.

$$\begin{aligned} 0.1x_1 - 0.5x_2 + x_4 &= 2.7 \\ 0.5x_1 - 2.5x_2 + x_3 - 0.4x_4 &= -4.7 \\ x_1 + 0.2x_2 - 0.1x_3 + 0.4x_4 &= 3.6 \\ 0.2x_1 + 0.4x_2 - 0.2x_3 &= 1.2 \end{aligned}$$

Il sistema di equazioni dato si può scrivere come

$$\begin{bmatrix} 0.1 & -0.5 & 0 & 1 & 2.7 \\ 0.5 & -2.5 & 1 & -0.4 & -4.7 \\ 1 & 0.2 & -0.1 & 0.4 & 3.6 \\ 0.2 & 0.4 & -0.2 & 0 & 1.2 \end{bmatrix}$$

Si effettuano ora le seguenti operazioni:

- Si trasformi la prima colonna nella (0,1,0,0) nel seguente modo:
 - Si moltiplichi la prima riga per -5 e si sommi alla seconda riga.
 - Si moltiplichi la prima riga per -10 e si sommi alla terza riga.
 - Si moltiplichi la prima riga per -2 e si sommi alla quarta riga.
 Il risultato è la nuova matrice

$$\begin{bmatrix} 0.1 & -0.5 & 0 & 1 & 2.7 \\ 0 & 0 & 1 & -5.4 & -18.2 \\ 0 & 5.2 & -0.1 & -9.6 & -23.4 \\ 0 & 1.4 & -0.2 & -2 & -4.2 \end{bmatrix}$$

- Si elimini lo zero dalla diagonale principale scambiando fra loro la seconda riga con la terza (ovvero la seconda con la quarta).

$$\begin{bmatrix} 0.1 & -0.5 & 0 & 1 & 2.7 \\ 0 & 5.2 & -0.1 & -9.6 & -23.4 \\ 0 & 0 & 1 & -5.4 & -18.2 \\ 0 & 1.4 & -0.2 & -2 & -4.2 \end{bmatrix}$$

- Si trasformi la seconda colonna nella $(-0.5, 5.2, 0, 0)$ nella maniera seguente: Si moltiplichi la seconda riga per

$$-\frac{1.4}{5.2} = -0.269$$

e si sommi all'ultima riga. Il risultato è

$$\begin{bmatrix} 0.1 & -0.5 & 0 & 1 & 2.7 \\ 0 & 5.2 & -0.1 & -9.6 & -23.4 \\ 0 & 0 & 1 & -5.4 & -18.2 \\ 0 & 0 & -0.173 & 0.585 & 2.1 \end{bmatrix}$$

4. Si trasformi la terza colonna nella $(0, -0.1, 1, 0)$ come segue: Si moltiplichi la terza riga per 0.173 e si sommi alla quarta riga. Il risultato è

$$\begin{bmatrix} 0.1 & -0.5 & 0 & 1 & 2.7 \\ 0 & 5.2 & -0.1 & -9.6 & -23.4 \\ 0 & 0 & 1 & -5.4 & -18.2 \\ 0 & 0 & 0 & -0.35 & -1.05 \end{bmatrix}$$

5. Si risolva ora rispetto ad x_4, x_3, x_2 ed x_1 come segue.

$$x_4 = (-1.05)/(-0.35) = 3$$

$$x_3 = [-18.2 - (-5.4)(3)]/1 = -2$$

$$x_2 = [-23.4 - (-9.6)(3) - (-0.1)(-2)]/5.2 = 1$$

$$x_1 = [2.7 - (1)(3) - (0)(-2) - (-0.5)(1)]/0.1 = 2$$

- 5.8. Risolvere il sistema di equazioni presentato nel problema 5.7 col metodo di eliminazione di Gauss-Jordan.

Il sistema di equazioni dato si può scrivere sotto forma di matrice nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} 0.1 & -0.5 & 0 & 1 & 2.7 \\ 0.5 & -2.5 & 1 & -0.4 & -4.7 \\ 1 & 0.2 & -0.1 & 0.4 & 3.6 \\ 0.2 & 0.4 & -0.2 & 0 & 1.2 \end{bmatrix}$$

Si effettuano ora le operazioni seguenti su tale matrice:

- Si trasformi la prima colonna nella $(1, 0, 0, 0)$ come segue:
 - Si moltiplichi la prima riga per -5 e si sommi alla seconda riga.
 - Si moltiplichi la prima riga per -10 e si sommi alla terza riga.
 - Si moltiplichi la prima riga per -2 e si sommi alla quarta riga.
 - Si moltiplichi la prima riga per 10 .

Il risultato è

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 & 10 & 27 \\ 0 & 0 & 1 & -5.4 & -18.2 \\ 0 & 5.2 & -0.1 & -9.6 & -23.4 \\ 0 & 1.4 & -0.2 & -2 & -4.2 \end{bmatrix}$$

- Si elimini lo zero dalla diagonale principale scambiando fra loro la seconda riga con la terza (ovvero la seconda con la quarta).

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 & 10 & 27 \\ 0 & 5.2 & -0.1 & -9.6 & -23.4 \\ 0 & 0 & 1 & -5.4 & -18.2 \\ 0 & 1.4 & -0.2 & -2 & -4.2 \end{bmatrix}$$

- Si trasformi la seconda colonna nella $(0, 1, 0, 0)$ nel seguente modo:

- Si moltiplichi la seconda riga per $5/5.2 = 0.962$ e si sommi alla prima riga.
- Si moltiplichi la seconda riga per $-1.4/5.2 = -0.269$ e si sommi all'ultima riga.
- Si moltiplichi la seconda riga per $1/5.2 = 0.192$.

Il risultato è

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.096 & 0.77 & 4.5 \\ 0 & 1 & -0.019 & -1.85 & -4.5 \\ 0 & 0 & 1 & -5.4 & -18.2 \\ 0 & 0 & -0.173 & 0.585 & 2.1 \end{bmatrix}$$

- Si trasformi la terza colonna nella $(0, 0, 1, 0)$ come segue:
 - Si moltiplichi la terza riga per 0.096 e si sommi alla prima riga.
 - Si moltiplichi la terza riga per 0.019 e si sommi alla seconda riga.
 - Si moltiplichi la terza riga per 0.173 e si sommi alla quarta riga.
 Il risultato è

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.25 & 2.75 \\ 0 & 1 & 0 & -1.95 & -4.85 \\ 0 & 0 & 1 & -5.4 & -18.2 \\ 0 & 0 & 0 & -0.35 & -1.05 \end{bmatrix}$$

- Si trasformi la quarta colonna nella $(0, 0, 0, 1)$ come segue:
 - Si moltiplichi la quarta riga per $0.25/0.35 = 0.714$ e si sommi alla prima riga.
 - Si moltiplichi la quarta riga per $-1.95/0.35 = -5.571$ e si sommi alla seconda riga.
 - Si moltiplichi la quarta riga per $-5.4/0.35 = -15.429$ e si sommi alla terza riga.
 - Si moltiplichi la quarta riga per $-1/0.35 = -2.86$.
 Il risultato è

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

La risposta cercata compare ora nell'ultima colonna. Sarà dunque $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$ ed $x_4 = 3$.

- 5.9. Quando si risolve un sistema di equazioni lineari simultanee, accade talvolta che la soluzione calcolata sia imprecisa a causa di errori numerici di arrotondamento. Il procedimento seguente può venire utilizzato per migliorare la precisione della soluzione calcolata.

- Si supponga che i valori calcolati delle incognite siano $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$. Sostituendo questi valori nel sistema di equazioni originario, si ottiene un gruppo corrispondente di valori per i termini del secondo membro, cioè

$$\begin{aligned} a_{11}\tilde{x}_1 + a_{12}\tilde{x}_2 + \dots + a_{1n}\tilde{x}_n &= \tilde{b}_1 \\ a_{21}\tilde{x}_1 + a_{22}\tilde{x}_2 + \dots + a_{2n}\tilde{x}_n &= \tilde{b}_2 \\ \dots &\dots \\ a_{n1}\tilde{x}_1 + a_{n2}\tilde{x}_2 + \dots + a_{nn}\tilde{x}_n &= \tilde{b}_n \end{aligned}$$

I valori calcolati, $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n$ differiranno dai valori originari $b_1, b_2, \dots, b_n$ a causa delle imprecisioni nelle $\tilde{x}$.

- Si calcolino le quantità

$$\begin{aligned} d_1 &= b_1 - \tilde{b}_1 \\ d_2 &= b_2 - \tilde{b}_2 \\ \dots &\dots \\ d_n &= b_n - \tilde{b}_n \end{aligned}$$

- Si risolva ora il sistema di equazioni

$$\begin{aligned} a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \dots + a_{1n}e_n &= d_1 \\ a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{2n}e_n &= d_2 \\ \dots &\dots \\ a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \dots + a_{nn}e_n &= d_n \end{aligned}$$

rispetto alle incognite $e_1, e_2, \dots, e_n$, utilizzando lo stesso procedimento di risoluzione usato per calcolare le $\tilde{x}$. Queste incognite e saranno i *termini correttivi* per le $\tilde{x}$.

4. Una volta determinate le e , si calcoli un nuovo (corretto) gruppo di valori delle x nel seguente modo.

$$x_1 = \tilde{x}_1 + e_1$$

$$x_2 = \tilde{x}_2 + e_2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_n = \tilde{x}_n + e_n$$

5. L'intero procedimento può venire ripetuto, se lo si desidera. Di solito, tuttavia, ciò non sarà necessario. Si supponga che il seguente sistema di equazioni sia stato risolto in maniera non precisa:

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 3$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = -3$$

ottenendo la soluzione approssimata $x_1 = 1.2$, $x_2 = 1.8$, $x_3 = 2.7$. (La soluzione corretta è $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, come si è mostrato negli esempi 5.11 e 5.12). Utilizzare il procedimento precedente per ottenere una soluzione più precisa.

Si ha $\tilde{x}_1 = 1.2$, $\tilde{x}_2 = 1.8$, $\tilde{x}_3 = 2.7$. Con questi valori si calcolano le $\tilde{b}$, ottenendo,

$$\tilde{b}_1 = (3)(1.2) + (2)(1.8) - (1)(2.7) = 4.5$$

$$\tilde{b}_2 = (2)(1.2) - (1)(1.8) + (1)(2.7) = 3.3$$

$$\tilde{b}_3 = (1)(1.2) + (1)(1.8) - (2)(2.7) = -2.4$$

Si possono ora calcolare le d dalle

$$d_1 = 4 - 4.5 = -0.5$$

$$d_2 = 3 - 3.3 = -0.3$$

$$d_3 = -3 - (-2.4) = -0.6$$

Si deve ora risolvere il sistema di equazioni

$$3e_1 + 2e_2 - e_3 = -0.5$$

$$2e_1 - e_2 + e_3 = -0.3$$

$$e_1 + e_2 - 2e_3 = -0.6$$

La soluzione è $e_1 = -0.20$, $e_2 = 0.20$, $e_3 = 0.30$. Perciò la soluzione corretta del sistema di equazioni originario è

$$x_1 = 1.2 + (-0.2) = 1.0$$

$$x_2 = 1.8 + 0.2 = 2.0$$

$$x_3 = 2.7 + 0.3 = 3.0$$

5.10. Valutare l'integrale

$$I = \int_0^1 x^2 dx$$

per via grafica, utilizzando 10 rettangoli di uguale ampiezza. Confrontare la soluzione con i risultati ottenuti nell'esempio 5.14.

La fig. 5-11 mostra un diagramma di x^2 in funzione di x . Si vede che l'intervallo totale $0 \leq x \leq 1$ è stato diviso in 10 sotto-intervalli, ciascuno di ampiezza $\Delta x = 0.10$. L'altezza e l'area di ciascuno dei rettangoli associati sono date nella tab. 5-5. Le singole aree danno per somma 0.337, valore che differisce dal valore vero, 0.333, soltanto dell'1.2%. Questo risultato, confrontato col valore 0.342 ottenuto mediante integrazione grafica con 5 sotto-intervalli nell'esempio 5.14, appare senz'altro migliore. Perciò, quanto maggiore è il numero di sotto-intervalli considerati, tanto più preciso sarà il risultato finale, come senz'altro ci si deve aspettare.

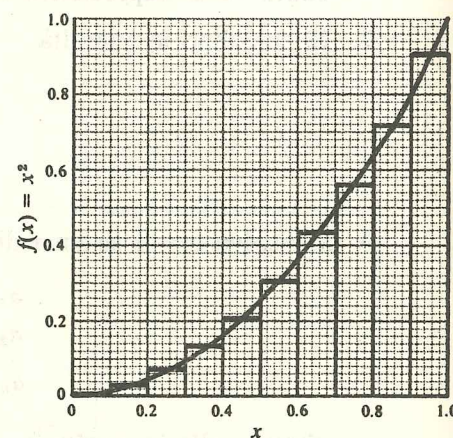


Fig. 5-11

Tabella 5-5

Sotto-intervallo n.	Altezza	Area
1	0.005	0.0005
2	0.025	0.0025
3	0.070	0.0070
4	0.130	0.0130
5	0.210	0.0210
6	0.310	0.0310
7	0.430	0.0430
8	0.560	0.0560
9	0.720	0.0720
10	0.910	0.0910
Totale		0.3370

5.11. Valutare l'integrale

$$I = \int_0^1 x^2 dx$$

per via numerica, facendo uso: (a) della regola dei trapezi, con 10 sotto-intervalli uguali (cioè $\Delta x = 0.10$); (b) della regola di Simpson, con $\Delta x = 0.10$. Confrontare i risultati con la risposta corretta, $I = 1/3$.

$$\begin{aligned} (a) \quad I &= (\Delta x) \left(\frac{y_1}{2} + y_2 + y_3 + \dots + y_{10} + \frac{y_{11}}{2} \right) \\ &= (0.10) \left[\frac{0}{2} + (0.1)^2 + (0.2)^2 + \dots + (0.9)^2 + \frac{1}{2} \right] \\ &= (0.10)(0 + 0.01 + 0.04 + 0.09 + 0.16 + 0.25 + 0.36 + 0.49 + 0.64 + 0.81 + 0.50) \\ &= 0.335 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad I &= \frac{\Delta x}{3} (y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 + \dots + 2y_9 + 4y_{10} + y_{11}) \\ &= \frac{0.10}{3} [0 + 4(0.01) + 2(0.04) + 4(0.09) + 2(0.16) + 4(0.25) + 2(0.36) + 4(0.49) \\ &\quad + 2(0.64) + 4(0.81) + 1] \\ &= \frac{0.10}{3} (0 + 0.04 + 0.08 + 0.36 + 0.32 + 1.00 + 0.72 + 1.96 + 1.28 + 3.24 + 1.00) \\ &= \frac{0.10}{3} (10.00) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Si vede che con la regola dei trapezi si ottiene un valore che è in eccesso di circa lo 0,5% (ma che è ancora molto vicino alla risposta esatta). La regola di Simpson fornisce una risposta che, in questo caso, è esatta. Infatti, si può mostrare che, qualunque sia il valore di Δx , la regola di Simpson fornisce una risposta esatta se l'integrando è un polinomio di grado 3 o inferiore. Si veda il problema 5.48.

5.12. Per migliorare la precisione di un'integrazione numerica effettuata facendo uso della regola dei trapezi, si può ricorrere al procedimento seguente.

1. Si valuti l'integrale nella solita maniera (utilizzando la regola dei trapezi), con n sotto-intervalli uguali, ciascuno di ampiezza h . Il valore calcolato dell'integrale si indichi con I_h .
2. Si ripeta il procedimento con m sotto-intervalli uguali, ciascuno di ampiezza k . Il valore calcolato dell'integrale si indichi con I_k .

3. Si assuma che il valore vero dell'integrale possa essere espresso come

$$I = I_h + ch^2 \quad \text{ovvero} \quad I = I_k + ck^2$$

dove c è una costante incognita. Queste due equazioni possono venire combinate per eliminare c , ottenendo

$$I = \frac{h^2 I_k - k^2 I_h}{h^2 - k^2}$$

Questo valore sarà più vicino alla soluzione vera sia di I_h sia di I_k .

Utilizzare il procedimento qui illustrato per migliorare i risultati dell'esempio 5.14 e del problema 5.11(a) per la valutazione di

$$I = \int_0^1 x^2 dx$$

Si ha

Esempio 5.14

$$\begin{aligned} n &= 5 \\ h &= 0.20 \\ I_h &= 0.342 \end{aligned}$$

Problema 5.11(a)

$$\begin{aligned} m &= 10 \\ k &= 0.10 \\ I_k &= 0.335 \end{aligned}$$

Sostituendo i risultati delle due integrazioni numeriche nell'equazione di correzione, si ottiene

$$I = \frac{(0.20)^2(0.335) - (0.10)^2(0.342)}{(0.20)^2 - (0.10)^2} = \frac{0.01340 - 0.00342}{0.03} = 0.333$$

risposta che è esatta fino alla terza cifra significativa.

- 5.13. Un'automobile accelera da ferma alla velocità massima in 10 s. La curva della velocità in funzione del tempo può essere rappresentata mediante l'equazione

$$v = ct^{3/2}$$

dove v = velocità, m/s
 c = costante di proporzionalità, m/s^{5/2}
 t = tempo, s

Se l'automobile percorre 109.5 m nell'intervallo di 10 s, qual è la sua velocità finale?

La velocità media può essere determinata dalla

$$\bar{v} = \frac{109.5 \text{ m}}{10 \text{ s}} = 10.95 \text{ m/s}$$

Ma dalla definizione di media integrale, si ha

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{1}{10} \int_0^{10} v dt = \frac{1}{10} \int_0^{10} ct^{3/2} dt \\ &= \left(\frac{2}{5}\right) \left(\frac{1}{10}\right) ct^{5/2} \Big|_0^{10} = \frac{c}{25} (10)^{5/2} = 12.65c \end{aligned}$$

Quindi $12.65c = 10.95$, da cui $c = 0.866 \text{ m/s}^{5/2}$. Si può adesso determinare la velocità finale dalla

$$v = 0.866(10)^{3/2} = 27.39 \text{ m/s}$$

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

Risposte alla maggior parte dei problemi sono fornite alla fine del libro

- 5.14. Verificare che $x = 1.38$ è una radice approssimata della $x^2 = 10 \cos x$ (v. l'esempio 5.1).

- 5.15. Verificare che $x = -2.2$, $x = 1.4$, e $x = 3.6$ sono radici approssimate dell'equazione

$$x^5 - 3x^4 - 3x^2 - 35x + 60 = 0$$

(v. l'esempio 5.4).

- 5.16. Risolvere per via grafica le seguenti equazioni:

$$(a) \quad x^5 + 3x^2 - 10 = 0$$

$$(b) \quad x^3 + 2x - 7 = 0$$

$$(c) \quad x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(d) \quad 4x^3 - x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$(e) \quad 2x = \tan x \quad (\text{la più piccola radice positiva})$$

$$(f) \quad x + \cos x = 1 + \sin x \quad \pi/2 < x < \pi$$

- 5.17. Determinare tutte le radici reali dell'equazione

$$x^5 - 3x^4 - 3x^2 - 35x + 60 = 0$$

utilizzando il procedimento grafico descritto nel problema 5.3 (v. anche l'esempio 5.4).

- 5.18. Verificare che $x = 1.379\,365$ è un valore preciso per la radice positiva della $x^2 = 10 \cos x$ (v. gli esempi 5.5, 5.8 e 5.9).

- 5.19. Risolvere ciascuna delle seguenti equazioni col metodo delle sostituzioni successive. Riordinare ciascuna equazione in modo che il calcolo converga. Per le equazioni dalla (a) alla (f), confrontare le soluzioni con quelle ottenute nel problema 5.16.

$$(a) \quad x^5 + 3x^2 - 10 = 0$$

$$(b) \quad x^3 + 2x - 7 = 0$$

$$(c) \quad x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(d) \quad 4x^3 - x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$(e) \quad 2x = \tan x \quad (\text{la più piccola radice positiva})$$

$$(f) \quad x + \cos x = 1 + \sin x \quad \pi/2 < x < \pi$$

$$(g) \quad 0.125x^3 + 0.925x + 0.586\,25 = 0$$

$$(h) \quad -0.375x^3 + 5.50x^2 - 18.156\,25 = 0$$

- 5.20. Risolvere le equazioni date nel problema 5.19 mediante il metodo di Newton-Raphson. Per ciascuna equazione confrontare la rapidità di convergenza consentita dai due metodi.

- 5.21. Risolvere le equazioni date nel problema 5.19 col metodo della bisezione. Confrontare la mole di calcoli richiesta per risolvere ciascuna equazione con le moli richieste dai metodi delle sostituzioni successive e di Newton-Raphson.

- 5.22. Si è mostrato che l'equazione $x^5 - 3x^4 - 3x^2 - 35x + 60 = 0$ ha tre radici reali approssimativamente per $x = -2.2$, $x = 1.4$, ed $x = 3.6$ (v. l'esempio 5.4). Se l'equazione viene riordinata nella forma

$$x = \frac{x^5 - 3x^4 - 3x^2 + 60}{35}$$

mostrare che il metodo delle sostituzioni successive può venire impiegato per trovare la radice il cui valore è circa 1.4, ma non può essere impiegato per ottenere le altre due radici. (Rispondere senza risolvere effettivamente l'equazione).

- 5.23. Mostrare che il metodo di Newton-Raphson può venire impiegato per ottenere tutte e tre le radici reali dell'equazione

$$x^5 - 3x^4 - 3x^2 - 35x + 60 = 0$$

(Ricordare che le radici sono approssimativamente $x = -2.2$, $x = 1.4$, ed $x = 3.6$.) Rispondere al quesito senza risolvere effettivamente l'equazione.

- 5.24. Si supponga che l'equazione $x^5 - 3x^4 - 3x^2 - 35x + 60 = 0$ debba venire risolta rispetto alla sua radice reale compresa fra $x = 0$ ed $x = 3$, facendo uso del metodo della bisezione. (a) Quante iterazioni saranno necessarie per ridurre l'intervallo che contiene la radice a meno di 0.001? (b) Se si sono effettuate 16 iterazioni, quali saranno le dimensioni dell'intervallo finale? Quale sarà la precisione della risposta finale?

- 5.25. La caduta di tensione attraverso un dispositivo elettronico è data dalla

$$v = 2e^{-0.1t} \sin 0.5t$$

dove v rappresenta la caduta di tensione (in millivolt) e t rappresenta il tempo (in millisecondi).

- (a) Determinare quanto tempo occorrerà perché la tensione raggiunga un valore di 0.5 mV. (b) Determinare la caduta di tensione massima e l'istante in cui si verifica. (c) Determinare la caduta di tensione minima (cioè la caduta di tensione « negativa massima ») e l'istante in cui essa si verifica.

- 5.26. Il volume specifico dell'acqua (in m^3/kg) varia con la temperatura dell'acqua. Entro i limiti di 0°C e 33°C , il volume specifico può essere determinato con la formula

$$V = 0.9999 \times 10^{-3} - 6.43 \times 10^{-8} T + 8.51 \times 10^{-9} T^2 - 6.8 \times 10^{-11} T^3$$

Determinare la temperatura a cui il volume specifico sarà minimo. Quale sarà il valore del volume specifico a questa temperatura?

- 5.27. Un recipiente per lo stoccaggio di gas ha la forma di un cilindro con una sommità emisferica. Se la parte cilindrica del recipiente ha un'altezza di 1.50 m, quale deve essere il suo raggio affinché il recipiente abbia un volume di 0.1 m^3 ?

- 5.28. Un conduttore elettrico deve venire rivestito con un isolante tubolare il cui raggio interno è r e quello esterno R . Affinché l'isolante sia il più efficace possibile, il rapporto fra i raggi deve soddisfare all'equazione

$$\ln x = 1 - \frac{1}{x^2}$$

essendo $x = R/r$. (a) Determinare il valore di x che soddisfa l'equazione precedente. (b) Se l'isolante ha un raggio interno di 5 mm, quale sarà il suo raggio esterno?

- 5.29. I costi dell'ipoteca sulla casa vengono determinati con l'equazione

$$A = iP \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

dove A = pagamento mensile (dollari)

P = valore totale del prestito (dollari)

i = tasso d'interesse mensile espresso in termini decimali (per es. un tasso del 6% per anno sarebbe l'1/2% per mese, che verrebbe espresso come 0.005)

n = numero totale di pagamenti mensili

- (a) Una persona prende in prestito 40.000 dollari per 30 anni. Se i pagamenti mensili sono pari a 307.57 dollari, qual è il tasso d'interesse mensile? (b) A quale tasso d'interesse annuale corrisponde? (c) Quale sarà il costo totale del prestito (inclusi gli interessi) sull'intero periodo di 30 anni?

- 5.30. Risolvere i seguenti sistemi di equazioni lineari simultanee utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss.

- (a) $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 17$
 $3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$
 $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 7$
- (b) $3x_1 + x_2 - 3x_3 = -7$
 $x_1 + 2x_3 = 0$
 $2x_1 - 5x_2 - 2x_3 = -16$
- (c) $0.2x_1 + 1.5x_2 - 0.5x_3 = -3.40$
 $1.2x_1 + 1.5x_3 - 0.5x_4 = 5.35$
 $x_1 - 0.2x_2 - 2.5x_3 + 1.8x_4 = -9.05$
 $0.8x_1 + 0.6x_2 + 2x_3 - x_4 = 6.50$
- (d) $11x_1 + 3x_2 + x_4 + 2x_5 = 51$
 $4x_2 + 2x_3 + x_5 = 15$
 $3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4 = 15$
 $4x_1 + 4x_3 + 10x_4 + x_5 = 20$
 $2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 + 13x_5 = 92$

- 5.31. Risolvere ciascun sistema di equazioni lineari simultanee dato nel problema 5.30 mediante il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan.

- 5.32. Risolvere il sistema di 5 equazioni lineari simultanee dato nel problema 5.30 (d) col metodo dei determinanti (regola di Cramer). Confrontare la mole di lavoro richiesta dal metodo di eliminazione di Gauss. Qual è il metodo migliore?

- 5.33. Si supponga di avere ottenuto la seguente soluzione approssimata per il sistema di equazioni dato nel problema 5.30(d): $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 6$. Utilizzare il metodo presentato nel problema 5.9 per ottenere una soluzione più precisa.

- 5.34. Utilizzare il metodo di eliminazione di Gauss per risolvere le equazioni dei minimi quadrati del problema 4.22 rispetto a c_1 , c_2 e c_3 .

- 5.35. Un'acciaieria produce quattro differenti tipi di leghe di acciaio, indicate con A1, A2, A3 ed A4. Ciascuna lega contiene piccole quantità di cromo, di molibdeno, di titanio e di nichel. La composizione richiesta per ciascuna lega è la seguente:

Lega	Cr	Mo	Ti	Ni
A1	1.6%	0.7%	1.2%	0.3%
A2	0.6	0.3	1.0	0.8
A3	0.3	0.7	1.1	1.5
A4	1.4	0.9	0.7	2.2

Si supponga che i componenti delle leghe siano disponibili nelle seguenti quantità:

Componente	Disponibilità
Cr	1200 kg/giorno
Mo	800
Ti	1000
Ni	1500

Quale sarà la velocità di produzione di ciascuna lega, espressa in tonnellate metriche per giorno (1 tonnellata metrica = 1000 kg)?

- 5.36. La fig. 5-12 mostra una rete complessa di resistori elettrici. (a) Ricavare un gruppo di equazioni che rappresentino i flussi di corrente nei resistori, facendo uso delle leggi di Kirchhoff. (b) Risolvere le equazioni rispetto ai flussi di corrente.

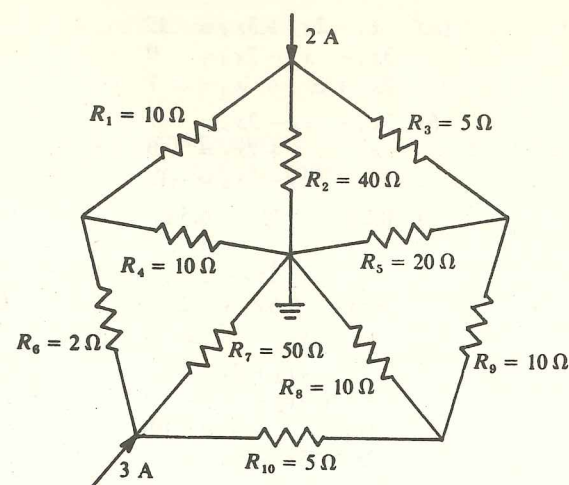


Fig. 5-12

- 5.37. La parete di un forno è fatta di tre materiali separati, come è mostrato in fig. 5-13. Si indichi con k_i la conducibilità termica del materiale i -esimo e con Δx_i lo spessore corrispondente ($i = 1, 2, 3$). Le equazioni della conduzione del calore in regime permanente si possono allora scrivere nella forma

$$\begin{aligned} T_0 - T_1 &= (q \Delta x_1) / k_1 \\ T_1 - T_2 &= (q \Delta x_2) / k_2 \\ T_2 - T_3 &= (q \Delta x_3) / k_3 \\ h_1(T_a - T_0) &= h_2(T_3 - T_b) \end{aligned}$$

dove T_0, T_1, T_2, T_3, T_a e T_b sono le temperature indicate in fig. 5-13, q è il flusso termico a regime permanente, ed h_1 ed h_2 sono coefficienti di trasmissione del calore. Si supponga che

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= 0.5 \text{ cm} & k_1 &= 0.01 \text{ cal/cm} \cdot \text{s} \cdot ^\circ\text{C} \\ \Delta x_2 &= 0.3 \text{ cm} & k_2 &= 0.15 \text{ cal/cm} \cdot \text{s} \cdot ^\circ\text{C} \\ \Delta x_3 &= 0.2 \text{ cm} & k_3 &= 0.03 \text{ cal/cm} \cdot \text{s} \cdot ^\circ\text{C} \\ T_a &= 200 ^\circ\text{C} & h_1 &= 1.0 \text{ cal/cm}^2 \cdot \text{s} \cdot ^\circ\text{C} \\ T_b &= 20 ^\circ\text{C} & h_2 &= 0.8 \text{ cal/cm}^2 \cdot \text{s} \cdot ^\circ\text{C} \end{aligned}$$

e $q = 2.955 \text{ cal/cm}^2 \cdot \text{s}$. Risolvere il sistema precedente rispetto alle temperature incognite T_0, T_1, T_2 e T_3 .

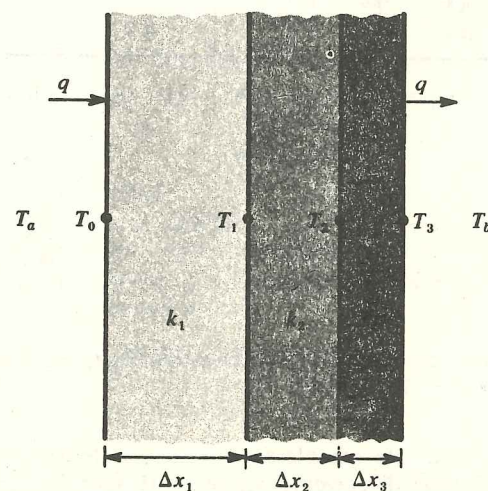


Fig. 5-13

- 5.38. Valutare l'integrale

$$I = \int_0^1 x^2 dx$$

riportando in grafico x^2 in funzione di x ($0 \leq x \leq 1$) su un foglio di carta millimetrata pesante sufficientemente grande, ritagliando l'area sottesa alla curva e pesandola, e quindi pesando un pezzo della stessa carta millimetrata di area nota (per es. un pezzo quadrato). Confrontare il risultato col valore corretto, $I = 1/3$ (v. anche l'esempio 5.14).

- 5.39. Un satellite per comunicazioni è lanciato in orbita da un razzo a tre stadi. Durante il lancio la velocità del razzo è telemisurata a terra, ottenendo la registrazione continua mostrata in fig. 5-14. Determinare la distanza percorsa dal razzo dopo 60 s (a) utilizzando la regola dei trapezi con 12 sotto-intervalli uguali, (b) utilizzando il metodo del problema 5.38.

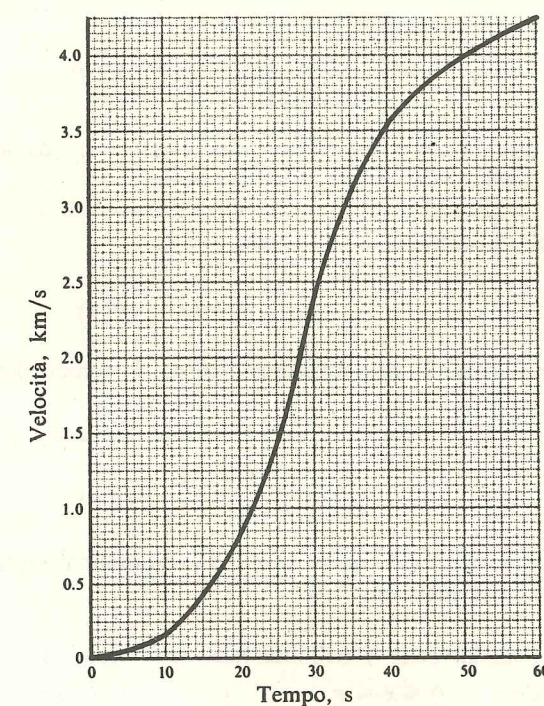


Fig. 5-14

- 5.40. Riportare in grafico i dati di tensione-tempo presentati nell'esempio 5.15 ed integrarli per via grafica. Determinare il corrispondente valore dell'induttanza (L) e confrontarlo col risultato ottenuto per via numerica nell'esempio 5.15 utilizzando la regola dei trapezi ($L = 5\text{H}$).

- 5.41. Valutare l'integrale

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

per via grafica. Confrontare la risposta con i risultati ottenuti mediante la regola dei trapezi e la regola di Simpson (v. gli esempi 5.16 e 5.17).

- 5.42. Valutare l'integrale

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

facendo uso del metodo discusso nel problema 5.38. Confrontare il risultato con i valori ottenuti usando la regola dei trapezi e la regola di Simpson (v. gli esempi 5.16 e 5.17).

- 5.43. Valutare ciascuno dei seguenti integrali per via grafica.

$$(a) \int_1^2 \frac{dx}{x} \quad (b) \int_0^\pi x \sin x \, dx \quad (c) \int_{0.5}^{3.5} \frac{dx}{x^2 + 3} \quad (d) \int_{-2}^2 \frac{x \, dx}{5 + 2x}$$

- 5.44. Valutare ciascuno degli integrali dati nel problema 5.43 per via numerica, utilizzando la regola dei trapezi. Scegliere una ampiezza d'intervallo sufficientemente piccola così che ciascuna soluzione risulti ragionevolmente precisa.
- 5.45. Valutare ciascuno degli integrali dati nel problema 5.43 per via numerica, utilizzando la regola di Simpson. Scegliere un'ampiezza d'intervallo sufficientemente piccola così che ciascuna soluzione risulti ragionevolmente precisa. Fare un confronto con i risultati ottenuti mediante la regola dei trapezi nel problema 5.44.

- 5.46. Valutare l'integrale

$$I = \int_0^2 [1 - (x - 1)^2] \, dx$$

per via numerica, utilizzando la regola dei trapezi con (a) $\Delta x = 0.50$, (b) $\Delta x = 0.10$. Confrontare i risultati ottenuti col valore vero, $I = 4/3$.

- 5.47. Ottenere un valore più corretto dell'integrale

$$I = \int_0^2 [1 - (x - 1)^2] \, dx$$

utilizzando i risultati ottenuti nel problema 5.46 ed il metodo descritto nel problema 5.12.

- 5.48. Verificare che la regola di Simpson fornisce un valore esatto di

$$I = \int_0^2 [1 - (x - 1)^2] \, dx$$

scegliendo (a) $\Delta x = 0.50$, (b) $\Delta x = 0.10$. Confrontare i risultati col valore vero, $I = 4/3$, e con i valori ottenuti nel problema 5.46.

- 5.49. Ricavare un valore medio della y nell'intervallo specificato in ciascuno dei seguenti casi.

$$\begin{array}{ll} (a) \, y = x \sin x & 0 \leq x \leq \pi \\ (b) \, y = (x^2 + 3)^{-1} & 0.5 \leq x \leq 3.5 \end{array} \quad \begin{array}{ll} (c) \, y = x(5 + 2x)^{-1} & -2 \leq x \leq 2 \\ (d) \, y = 1 - (x - 1)^2 & 0 \leq x \leq 2 \end{array}$$

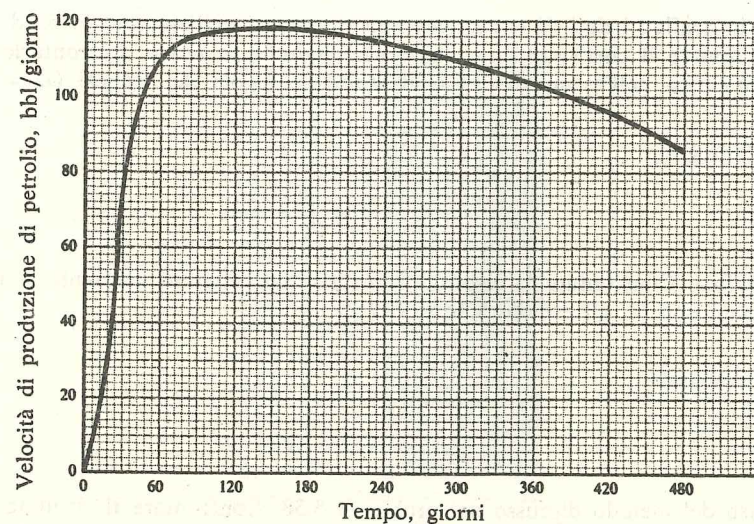


Fig. 5-15

- 5.50. La fig. 5-15 mostra la velocità di produzione (*capacità produttiva o produttività*) di un pozzo petrolifero in funzione del tempo. Determinare (a) la quantità totale di petrolio prodotto nel primo anno (360 giorni) di sfruttamento del pozzo, (b) la produttività media di petrolio nel corso di questo periodo.

- 5.51. La fig. 5-16 mostra il diagramma di un inquinante atmosferico in funzione del tempo per il periodo di un giorno intero. Determinare la concentrazione media dell'inquinante (a) per l'intero periodo di 24 ore, (b) fra le ore 8 del mattino e le ore 8 del pomeriggio.

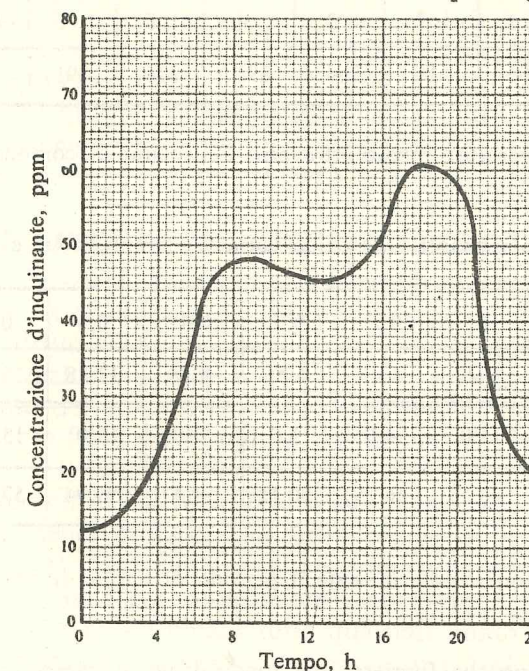


Fig. 5-16

- 5.52. Un razzo viene sparato in direzione verticale dalla superficie della terra. Durante il lancio la velocità del razzo e la sua altezza sulla superficie terrestre vengono teletrasmesse a terra. I dati sono riportati in grafico nella fig. 5-17

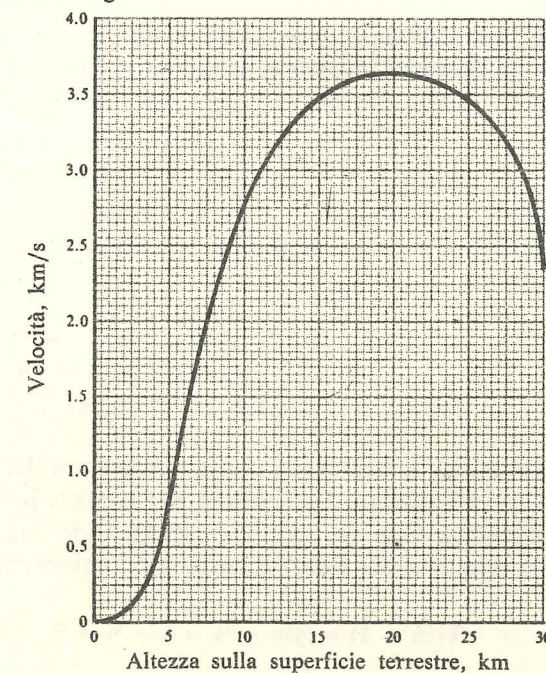


Fig. 5-17

Determinare quanto tempo occorre perché il razzo raggiunga una quota di (a) 10 km, (b) 20 km, (c) 30 km. (d) Qual è la velocità media durante il tempo richiesto perché il razzo raggiunga una quota di 30 km? (e) Qual è la velocità media sulla distanza di 30 km?

- 5.53. Un reattore nucleare contiene elementi di combustibile dello spessore di 10 mm. Durante il funzionamento a regime permanente, la distribuzione della temperatura all'interno di uno degli elementi di combustibile è quella sotto presentata.

x , mm	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T , °C	172	406	616	784	891	928	891	784	616	406	172

Determinare la temperatura media attraverso l'elemento di combustibile, mediante integrazione numerica.

- 5.54. La tensione in un componente elettronico varia nel tempo, come è mostrato nella seguente tabella:

t , ms	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.6	0.8	1.0	1.5	2.0
v , mV	0	2.27	4.46	6.56	8.58	12.38	15.88	19.12	26.17	31.94
t	2.5	3.0	4.0	5.0	7.0	10.0	15.0	20.0	50.0	
v	36.66	40.53	46.29	50.15	54.47	56.94	57.86	57.98	58.00	

Determinare la tensione media durante il periodo di tempo di 50 ms per mezzo d'integrazione numerica.

- 5.55. La velocità dell'acqua che fuoriesce dal fondo di un recipiente cilindrico è data dall'equazione

$$v = 0.50 e^{-0.36t}$$

dove v = velocità, m/s
 t = tempo, s

Si supponga che l'afflusso dell'acqua avvenga attraverso un foro circolare del raggio di 1 cm. Determinare, mediante integrazione numerica, il volume dell'acqua che esce dal recipiente nei primi 30 secondi.

CAPITOLO 6

Calcoli economici

Un nuovo progetto di ingegneria frequentemente si risolve in un'opportunità potenziale di investimento per la società finanziatrice. Così la realizzabilità del progetto viene spesso valutata in termini economici piuttosto che tecnici. Inoltre, se vari progetti differenti sono stati proposti, che si risolvono in un certo numero di opportunità di investimento competitive, la preferenza relativa da dare ad un investimento rispetto ad un altro viene basata generalmente su certi criteri economici. L'ingegnere deve perciò avere qualche conoscenza di economia in aggiunta ad una padronanza delle basi tecniche della sua professione.

6.1 CALCOLI DEGLI INTERESSI DI PAGAMENTI SINGOLI

Il denaro è una merce che viene usata per acquistare beni e servizi. In questo senso ha valore. Se un individuo, od un'organizzazione, presta, deposita o investe una somma di denaro, chi dà in prestito ha diritto ad un pagamento per l'uso di quel denaro. Similmente, se un individuo, od un'organizzazione, prende in prestito una somma di denaro, chi prende in prestito deve pagare per l'uso del denaro. Una somma di denaro data o ricevuta in prestito è detta il *capitale*; un pagamento fatto per l'impiego del denaro di chicchessia è detto l'*interesse*.

Vi sono vari modi differenti di calcolare l'interesse, come sarà discusso più avanti. Per prima cosa, tuttavia, si deve tener presente che tutti i calcoli di interessi si basano sull'impiego di un *tasso d'interesse*. Il tasso d'interesse si esprime generalmente in per cento, ma deve venire convertito in forma decimale per poter essere usato in un calcolo dell'interesse. Per effettuare questa conversione, si esprime innanzitutto qualsiasi punto percentuale frazionario in forma decimale e quindi si divide l'intero tasso d'interesse per 100.

Esempio 6.1. Una banca paga un interesse del 5½% all'anno sui suoi libretti di risparmio. Questo interesse deve essere espresso come 0.055 quando viene utilizzato in un calcolo di interessi.

Si noti che non si è stabilito come l'interesse venga pagato (cioè con pagamento annuale, con pagamento trimestrale, ecc.). Di ciò si parlerà più avanti in questo paragrafo.

La determinazione di un adeguato tasso d'interesse si basa normalmente su due fattori: il grado di rischio associato con il previsto investimento e le condizioni economiche generali. Gli investimenti rischiosi richiedono tassi di interesse più alti di investimenti sicuri, prudenti.

Interesse semplice

L'ammontare dell'interesse semplice che matura durante ciascun periodo di interesse (per es. in ciascun anno) è una qualche frazione prefissata del capitale. L'ammontare totale dell'interesse è allora uguale al numero di periodi d'interesse moltiplicato per l'interesse maturato in ciascun periodo. Così,

$$I = niP$$

dove I = ammontare complessivo dell'interesse
 n = numero dei periodi di interesse
 i = tasso d'interesse (espresso in decimi)
 P = capitale

(Si noti che l'ammontare dell'interesse maturato in ciascun periodo è uguale ad iP .)

Normalmente, quando si ottiene un prestito ad interesse semplice, non si fa nessuna restituzione fino al termine del periodo del prestito. In quel momento vengono rimborsati sia il capitale sia l'interesse accumulato. La somma totale dovuta può essere espressa come

$$F = P + I = P + niP = (1 + ni)P$$

Esempio 6.2. Uno studente riceve in prestito 1000 dollari dallo zio per terminare la scuola. Lo zio acconsente di fargli pagare un interesse semplice al tasso di $5\frac{1}{2}\%$ per anno. Se lo studente aspetta due anni a restituire il prestito, quanto dovrà restituire?

Facendo uso della formula precedente,

$$F = [1 + 2(0.055)](\$1000) = \$1110$$

Così lo studente dopo due anni dovrà restituire 1110 dollari. Di questa somma, 1000 dollari rappresentano la restituzione del capitale (l'ammontare originario del prestito), e 110 dollari rappresentano l'interesse.

Esempio 6.3. Una studentessa ha ottenuto un prestito di 1000 dollari da una banca locale per completare i suoi studi. Per tre anni non deve restituire nulla del prestito. Al termine dei tre anni, tuttavia, deve restituire 1210 dollari, che rappresenta l'intero costo del prestito. A quale tasso d'interesse semplice corrisponde il prestito?

Si sa che $P = \$1000$, $F = \$1210$ ed $n = 3$. Si può allora risolvere rispetto ad i l'equazione precedente, ottenendo

$$i = \frac{1}{n} \left(\frac{F}{P} - 1 \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{\$1210}{\$1000} - 1 \right) = 0.07$$

Il tasso d'interesse semplice è perciò del 7% per anno.

Interesse composto

I calcoli tecnico-economici si basano generalmente sull'impiego dell'*interesse composto* anziché sull'interesse semplice. Nel calcolare l'interesse composto, si assume che l'interesse si accumuli da un periodo d'interesse (per es. un anno) a quello successivo.

In un dato periodo d'interesse, l'interesse corrente viene determinato in per cento della somma totale dovuta (cioè il capitale più l'interesse precedentemente accumulato). Così, per il primo periodo d'interesse, l'interesse è determinato dalla

$$I_1 = iP$$

e la somma totale dovuta al termine del primo periodo d'interesse è

$$F_1 = P + I_1 = P + iP = (1 + i)P$$

(come nell'interesse semplice). Per il secondo periodo d'interesse, l'interesse è determinato dalla

$$I_2 = iF_1 = i(1 + i)P$$

e la somma totale dovuta al termine del secondo periodo d'interesse è

$$\begin{aligned} F_2 &= P + I_1 + I_2 = P + iP + i(1 + i)P \\ &= [1 + i + i(1 + i)]P = [(1 + i) + i(1 + i)]P = (1 + i)^2 P \end{aligned}$$

Per il terzo periodo d'interesse,

$$I_3 = i(1 + i)^2 P \quad F_3 = (1 + i)^3 P$$

e così via. In generale, se vi sono n periodi d'interesse, è facile vedere che $F_n = (1 + i)^n P$. Di solito l'indice viene riportato e si scrive semplicemente

$$F = (1 + i)^n P$$

È questa la ben nota « legge » o formula dell'interesse composto. Si noti che F , la somma totale dovuta, aumenta *esponenzialmente* con n , il numero dei periodi d'interesse.

Esempio 6.4. Uno studente investe 1500 dollari in un conto in banca che rende un interesse del 5% capitalizzato su base annuale. Se lo studente non effettua nessun successivo versamento o prelievo, quanto denaro avrà accumulato dopo 20 anni?

Si sa che $P = \$1500$, $i = 0.05$, ed $n = 20$. Quindi

$$F = (1 + 0.05)^{20} (\$1500) = \$3979.95$$

L'interesse incluso nella somma precedente è $\$3979.95 - \$1500 = \$2479.95$, e risulta sostanzialmente superiore al deposito originario.

È interessante vedere quanto denaro si sarebbe accumulato dopo 20 anni se fosse stato pagato un interesse semplice. In tal caso

$$F = [1 + (20)(0.05)](\$1500) = \$3000$$

somma significativamente inferiore a quella accumulata attraverso l'interesse composto.

Il rapporto F/P è detto *fattore di interesse composto di pagamenti singoli*. Dalla formula dell'interesse composto,

$$F/P = (1 + i)^n$$

Il fattore $(1 + i)^n$ si può valutare facilmente con un calcolatore elettronico. Tuttavia, esso viene di solito presentato sotto forma di tabella, come nell'appendice B.

Esempio 6.5. Una piccola azienda manifatturiera programma di prendere in prestito 500.000 dollari per 4 anni allo scopo di ampliare la sua banchina di caricamento. Se l'azienda deve pagare gli interessi al tasso di interesse composto del 7% all'anno, quanto dovrà restituire al termine del periodo di prestito?

Dall'appendice B risulta che $F/P = 1.3108$ quando $i = 7\%$ ed $n = 4$. Si ottiene quindi

$$F = (F/P)P = (1.3108)(\$500\,000) = \$655\,400$$

Si poteva naturalmente ottenere lo stesso risultato facendo uso della formula $F = (1 + i)^n P$, ma l'impiego della tabella dell'appendice B è talvolta più conveniente.

Esempio 6.6. Una compagnia vuole ottenere in prestito 75.000 dollari per attrezzare un laboratorio di prove sui prodotti. Se la compagnia deve restituire 137.100 dollari al termine di 7 anni, quale tasso d'interesse annuale deve corrispondere? Utilizzare l'appendice B per ottenere una risposta.

Il fattore d'interesse composto di pagamenti singoli si può determinare con la

$$F/P = \$137\,100/\$75\,000 = 1.8280$$

Se si legge lungo la riga corrispondente ad $n = 7$ nell'appendice B, si trova che il fattore 1.8280 compare nella colonna contrassegnata con 9%. Perciò il tasso d'interesse è del 9% all'anno, pagato annualmente.

Esempio 6.7. Una compagnia vuole prendere in prestito 150.000 dollari per effettuare una campagna promozionale di un nuovo prodotto. Il tasso d'interesse corrente è dell'8% all'anno, pagato annualmente. Si supponga che la compagnia non programmi di restituire nulla del prestito fino al termine del periodo di prestito, e che in quel momento restituisca l'intero prestito. Se la compagnia non può restituire più di 200.000 dollari, quale sarà la massima durata del prestito consentita?

Il fattore d'interesse composto di pagamenti singoli si ottiene dalla

$$F/P = \$200\,000/\$150\,000 = 1.3333$$

Se si legge lungo la colonna dell'8% nell'appendice B, si vede che $F/P = 1.2597$ per $n = 3$ ed $F/P = 1.3605$ per $n = 4$. Poiché il valore di F/P calcolato cade fra questi due valori, si conclude che la durata del prestito deve essere un po' inferiore a 4 anni.

Una risposta più precisa si può ottenere mediante interpolazione lineare. Così,

$$n = 3 + \left(\frac{1.3333 - 1.2597}{1.3605 - 1.2597} \right) (4 - 3) = 3.73 \text{ anni}$$

In pratica, n è in genere limitato a valori interi. Quindi la massima durata del prestito consentita sarebbe effettivamente di 3 anni.

6.2 PAGAMENTI ANNUALI UGUALI

Quando il denaro si accumula su un libretto di risparmio, i depositi vengono fatti di solito ad intervalli periodici, regolari (una volta al mese, una volta l'anno, ecc.). Similmente, quando il denaro viene preso in prestito, il prestito viene di solito restituito in rate uguali ad intervalli regolari. Si deve quindi determinare in quale maniera un programma che implica pagamenti periodici uguali sia influenzato dal tasso d'interesse.

Si incominciano ad esaminare situazioni che implicano pagamenti *annuali uguali*. Le estensioni ad altri periodi di tempo verranno considerate nei problemi alla fine di questo capitolo.

Fattore d'interesse composto

Si consideri una situazione in cui una data somma di denaro, diciamo A , venga depositata su un conto bancario al termine di ogni anno. Supponiamo che il denaro frutti un interesse ad un tasso i capitalizzato su base annuale. Si vuole sapere quanto denaro si sarà accumulato dopo n anni.

Per rispondere a questo quesito, si noti che il deposito del primo anno aumenterà il suo valore fino ad

$$F_1 = A(1 + i)^{n-1}$$

dopo n anni. Similmente il deposito del secondo anno aumenterà di valore ad

$$F_2 = A(1 + i)^{n-2}$$

e così via. La somma totale di denaro che si sarà accumulata dopo n anni si può allora scrivere come

$$\begin{aligned} F &= F_1 + F_2 + \dots + F_n \\ &= A(1 + i)^{n-1} + A(1 + i)^{n-2} + \dots + A \\ &= A[(1 + i)^{n-1} + (1 + i)^{n-2} + \dots + 1] \end{aligned}$$

Questa equazione si può esprimere in una forma più semplice:

$$F = A \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right]$$

(v. il problema 6.2). Si può così calcolare il *montante* totale (F), perché si conosca quanto denaro viene depositato ogni anno (A), il tasso d'interesse (i) ed il numero totale di anni (n).

Esempio 6.8. Si supponga che un ingegnere risparmi 1000 dollari l'anno per 30 anni. Al termine di ogni anno l'ingegnere deposita i suoi risparmi in un conto bancario, che frutta l'interesse del 5½% capitalizzato su base annuale. Quanto denaro avrà accumulato l'ingegnere dopo 30 anni?

Sono dati: $A = \$1000$, $i = 0.055$, ed $n = 30$. Quindi

$$F = (\$1000) \left[\frac{(1 + 0.055)^{30} - 1}{0.055} \right] = \$72\,435.48$$

Poiché l'ingegnere ha depositato soltanto in totale 30.000 dollari, si vede che più della metà della somma accumulata è il risultato dell'interesse composto.

Il rapporto F/A è detto *fattore d'interesse composto dei pagamenti annuali uguali*. Questo fattore, come quello relativo ai pagamenti singoli, viene spesso presentato sotto forma di tabella in funzione di i e di n . L'appendice C riporta questi valori tabulari di F/A . Talvolta risulta preferibile fare uso di questa tabella anziché valutare F/A con un calcolatore.

Esempio 6.9. Uno studente decide di depositare 600 dollari su un libretto di risparmio al termine di ogni anno. Se la banca paga un interesse del 6% all'anno capitalizzato annualmente, quanti anni occorreranno perché lo studente accumuli 10.000 dollari?

Il rapporto F/A si può calcolare come

$$F/A = \$10\,000/\$600 = 16.6667$$

Se si esamina la colonna del 6% nell'appendice C, si vede che $F/A = 14.9716$ quando $n = 11$, ed $F/A = 16.8699$ quando $n = 12$. Quindi, per interpolazione lineare,

$$n = 11 + \frac{16.6667 - 14.9716}{16.8699 - 14.9716} (12 - 11) = 11.89 \text{ anni}$$

In pratica, tuttavia, l'interesse non viene accreditato se non *al termine* di ciascun anno. Quindi saranno necessari 12 anni pieni perché lo studente raggiunga il suo obiettivo. Dopo 12 anni lo studente avrà accumulato

$$F = (\$600)(16.8699) = \$10\,121.94$$

Fattore di recupero capitale

Si consideri ora una situazione alquanto diversa che implica pagamenti annuali uguali. Si supponga che una data somma di denaro, P , venga versata in un conto bancario, dove essa

rende interessi al tasso i , pagati annualmente. Si vuole conoscere la somma A che dovrebbe venire prelevata alla fine di ogni anno per fare in modo che il conto in banca risulti scoperto alla fine di n anni.

Il deposito iniziale P potrebbe aumentare di valore fino a $P(1 + i)^n$ alla fine degli n anni. D'altra parte, il primo prelievo A potrebbe, se lasciato in banca, aumentare il suo valore ad $A(1 + i)^{n-1}$ al termine degli n anni; il secondo prelievo potrebbe aumentare di valore fino ad $A(1 + i)^{n-2}$; ...; l'ultimo prelievo potrebbe raggiungere il valore $A(1 + i)^{n-n} = A$. Perciò

$$A(1 + i)^{n-1} + A(1 + i)^{n-2} + \dots + A = P(1 + i)^n$$

$$A \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right] = P(1 + i)^n$$

$$A = P \left[\frac{i(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} \right]$$

Esempio 6.10. Un ingegnere ha accumulato 100.000 dollari su un libretto di risparmio che rende l'interesse del 5½% all'anno, pagato annualmente. Considerando un suo prematuro ritiro dall'attività, l'ingegnere è interessato a convertire i suoi 100.000 dollari in una serie di pagamenti annuali uguali per un periodo di 20 anni. Se egli programma di ritirare la stessa somma di denaro ogni anno, qual è la somma massima che può ritirare?

Qui si ha $P = \$100\,000$, $i = 0.0525$, ed $n = 20$. Quindi

$$A = (\$100\,000) \left[\frac{(0.0525)(1 + 0.0525)^{20}}{(1 + 0.0525)^{20} - 1} \right] = \$8195.23$$

Così l'ingegnere può ritirare 8195.23 dollari dalla fine di ogni anno, per 20 anni. Al termine di questo periodo il suo libretto di risparmio sarà interamente esaurito. Si noti, tuttavia, che egli avrà ricevuto un totale di 163.904.60 dollari dei suoi originari 100.000 dollari.

Il fattore A/P è detto *fattore di recupero capitale per pagamenti annuali uguali*. Nell'appendice D sono riportati valori tabulari di A/P per vari valori di n per diversi tassi d'interesse comuni i .

Esempio 6.11. Una persona vuole prelevare 1000 dollari l'anno da un libretto di risparmio che frutta un interesse del 5% all'anno, pagato annualmente. Se i prelievi devono essere fatti alla fine di ogni anno per 7 anni, quanto denaro deve avere quella persona in banca all'inizio del periodo di 7 anni?

Per risolvere questo problema, si scriva $P = A/(A/P)$. Dall'appendice D, $A/P = 0.1728$ quando $n = 7$ ed $i = 5\%$. Quindi,

$$P = \$1000/0.1728 = \$5787.04$$

Le corporazioni (enti, società) investono denaro in imprese d'affari proprio come i singoli individui depositano denaro su un libretto di risparmio. Si assume che una corporazione sia sempre in grado di ricavare un profitto dal suo denaro. Perciò agli investimenti corporativi è sempre associato un equivalente tasso d'interesse.

Esempio 6.12. Una società di elettronica programma di investire 1 500 000 dollari per lo sviluppo di un nuovo tipo di terminale per computer. Si assume che la società ricaverà un profitto di 250 000 dollari all'anno per 10 anni dalla vendita di questi terminali, a partire dalla fine del primo anno. A quale tasso annuale di interesse composto ciò corrisponde? Si tratta di un buon investimento?

Si può determinare il fattore di recupero capitale come

$$A/P = \$250\,000/\$1\,500\,000 = 0.1667$$

Dall'appendice D, se si legge lungo la riga corrispondente ad $n = 10$, si vede che $A/P = 0.1627$ per $i = 10\%$ ed $A/P = 0.1770$ per $i = 12\%$. Quindi il tasso d'interesse corrispondente a questo investimento programmato è un po' maggiore del 10% all'anno, pagato annualmente.

Un risultato più preciso si può ottenere per interpolazione lineare. Così,

$$i = 10 + \left(\frac{0.1667 - 0.1627}{0.1770 - 0.1627} \right) (12 - 10) = 10.56\%$$

Non si può dire, in assoluto, se l'investimento proposto sia buono o cattivo. Ciò dipenderà dalle alternative che possono essere disponibili. Se la compagnia può investire il suo denaro in qualche altra attività con un più elevato tasso d'interesse equivalente, l'attuale proposta non risulta allettante.

Il fattore di recupero capitale per pagamenti annuali uguali ha un'altra importante interpretazione in relazione con i prestiti. Si supponga che una persona ottenga in prestito una somma di denaro, P , ad un tasso d'interesse i , pagato annualmente. Se questa persona programma di restituire il prestito (inclusi gli interessi) con n pagamenti annuali uguali, il fattore di recupero capitale dei pagamenti annuali uguali si utilizza per determinare l'ammontare di ciascun pagamento. Molti prestiti d'affari (a corporazioni così come a singoli individui) vengono calcolati su questa base.

Esempio 6.13. Una compagnia progetta di prendere in prestito 150 000 dollari all'interesse composto del 9% all'anno per finanziare l'installazione di un impianto di abbattimento dell'inquinamento atmosferico. Il prestito deve essere restituito in 12 pagamenti annuali uguali. Determinare l'ammontare di ciascun pagamento.

Questo problema si può risolvere scrivendo $A = P(A/P)$. Dall'appendice D, $A/P = 0.1397$ per $n = 12$ ed $i = 9\%$, per cui

$$A = (\$150\,000)(0.1397) = \$20\,955$$

La compagnia deve quindi pagare 20 955 dollari al termine di ogni anno, per 12 anni consecutivi, per poter restituire l'intero prestito. Si noti che i pagamenti annuali includono sia gli interessi sia il capitale.

6.3 IL VALORE NEL TEMPO DEL DENARO

Poiché il denaro è in grado di produrre interessi, il suo valore aumenta col tempo. Così, 100 dollari oggi equivalgono a 105 dollari a distanza di un anno, se il tasso di interesse pagato al termine dell'anno è del 5% per anno. Si dice allora che il *valore futuro* di 100 dollari è di 105 dollari se $i = 5\%$, pagato annualmente, ed $n = 1$.

Poiché il denaro aumenta di valore passando dal presente al futuro, esso deve diminuire di valore passando dal futuro al presente. Così 100 dollari fra un anno da ora equivalgono a 95.24 dollari oggi, se il tasso d'interesse è del 5% per anno, pagato su base annuale. (Si noti che $\$95.24 \times 1.05 = \$100$.) Si dice così che il *valore attuale* di 100 dollari è 95.24 dollari se $i = 5\%$, su base annuale, ed $n = 1$.

Esempio 6.14. Uno studente erediterà 5000 dollari fra tre anni. Lo studente ha un libretto di risparmio che paga un interesse del $5\frac{1}{2}\%$ all'anno, capitalizzato annualmente. Qual è il valore attuale dell'eredità dello studente?

Il valore attuale si può determinare scrivendo $P = F/(F/P)$. Così,

$$P = \$5000/(1 + 0.055)^3 = \$4258.07$$

In altre parole, se lo studente investisse 4258.07 dollari in un libretto di risparmio che paga un interesse del $5\frac{1}{2}\%$ all'anno, capitalizzato annualmente, lo studente alla fine dei tre anni avrebbe accumulato 5000 dollari.

Si poteva, naturalmente, usare l'appendice B per risolvere questo problema, sebbene in tal caso si sarebbe dovuto fare un'interpolazione fra le voci del 5% e del 6%.

Gli ingegneri devono frequentemente calcolare il valore attuale di un investimento proposto al fine di confrontare una strategia d'investimento con l'altra. Diremo di più sul confronto fra strategie d'investimento nel prossimo paragrafo. Tuttavia fin d'ora si deve tener presente che il concetto di valore attuale non è limitato ad investimenti per pagamenti singoli. Il concetto si può applicare a pagamenti annuali uguali ed a varie combinazioni fra pagamenti singoli ed annuali uguali. Le entrate e le uscite di cassa si possono includere entrambe in un singolo investimento proposto. Nel loro insieme queste varie componenti sono dette *flusso di cassa*.

Esempio 6.15. Una società di elettronica ha in programma la fabbricazione di un nuovo tipo di autoradio. Un investimento immediato di 750 000 dollari è richiesto per le necessità di fabbricazione, mentre un investimento aggiuntivo di 150 000 dollari sarà necessario per modificazioni nella linea di montaggio fra un anno. Occorreranno due anni per fabbricare scorte adeguate. Durante il terzo anno, si prevede che le nuove radio portino un profitto netto di 180 000 dollari. Si prevede che un simile livello di guadagni annuali continui per 10 anni. Al termine di questo periodo (cioè al termine del dodicesimo anno) il prodotto sarà considerato obsoleto e la produzione cesserà. Si può allora prevedere che i servizi di fabbricazione originari abbiano un valore di recupero di 100 000 dollari. Determinare il valore attuale dell'investimento proposto, basato su un tasso d'interesse equivalente dell'8% per anno, pagato annualmente.

Si può considerare questo problema consistente di quattro componenti separate: (1) la spesa iniziale di 750 000 dollari, (2) la spesa secondaria di 150 000 dollari, (3) le dieci entrate annuali uguali di 180 000 dollari ciascuna, e (4) l'entrata finale di 100 000 dollari. Si calcolerà il valore attuale di ciascuna voce, separatamente.

- (1) Il valore attuale della spesa iniziale è semplicemente

$$P = -\$750\,000$$

dove il segno meno indica un'uscita di cassa.

- (2) Il valore attuale della spesa secondaria si può scrivere come $P = F/(F/P)$.

Dall'appendice B, $F/P = 1.0800$ quando $i = 8\%$ ed $n = 1$, per cui

$$P = -\$150\,000/1.0800 = -\$138\,889$$

- (3) Il valore delle 10 entrate di cassa all'inizio del periodo decennale (cioè all'inizio del terzo anno) si può scrivere $P' = A/(A/P')$. Dall'appendice D, $A/P' = 0.1490$ quando $i = 8\%$ ed $n = 10$, per cui

$$P' = \$180\,000/0.1490 = \$1\,208\,054$$

Poiché questo valore corrisponde a due anni da adesso, si può ottenere il valore attuale come

$$P = F/(F/P)$$

dove $F = P'$. Dall'appendice B, $F/P = 1.1664$ quando $i = 8\%$ ed $n = 2$. Si ottiene quindi

$$P = \$1\,208\,054/1.1664 = \$1\,035\,712$$

- (4) Il valore attuale dell'indennità di recupero è semplicemente $P = F/(F/P)$. Dall'appendice B, $F/P = 2.5182$ quando $i = 8\%$ ed $n = 12$. Quindi

$$P = \$100\,000/2.5182 = \$39\,711$$

Il valore attuale dell'intero investimento si può allora ottenere sommando i valori presenti delle componenti separate:

$$-\$750\,000 - \$138\,889 + \$1\,035\,712 + \$39\,711 = \$186\,534$$

Quando si risolve un problema che implica entrate ed uscite di cassa multiple, è utile rappresentare graficamente le singole componenti in funzione del tempo. Le uscite di cassa (le spese) si scrivono come quantità negative, mentre le entrate sono positive. Le equivalenze di tempo si possono indicare con delle frecce.

Esempio 6.16. Il problema dell'esempio 6.15 è rappresentato nello schema grafico di fig. 6-1. Si ottiene lo stesso risultato, ma il problema è più facile da visualizzare se lo si struttura in questa maniera.

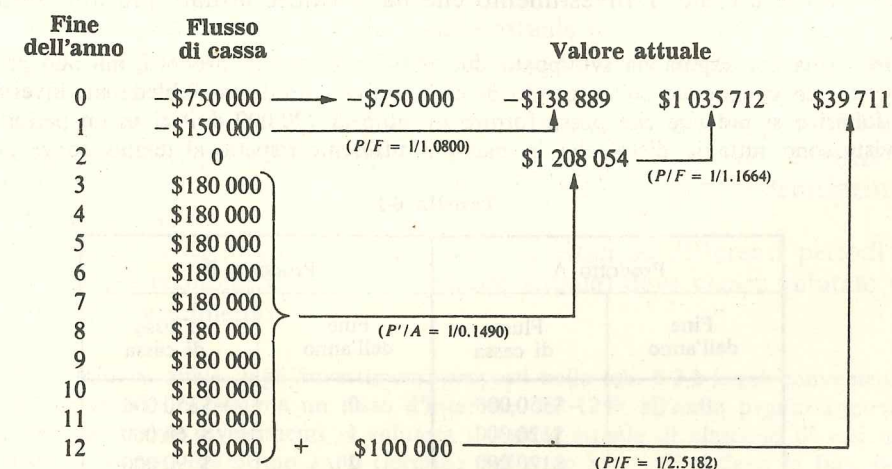


Fig. 6-1

Una combinazione fra entrate ed uscite di cassa si può considerare anche in termini di valore futuro, sebbene il criterio del valore futuro sia meno comune.

Esempio 6.17. Determinare il valore futuro, al termine del dodicesimo anno, dell'investimento proposto descritto nell'esempio 6.15. La fig. 6.2 ne è la rappresentazione grafica più appropriata.

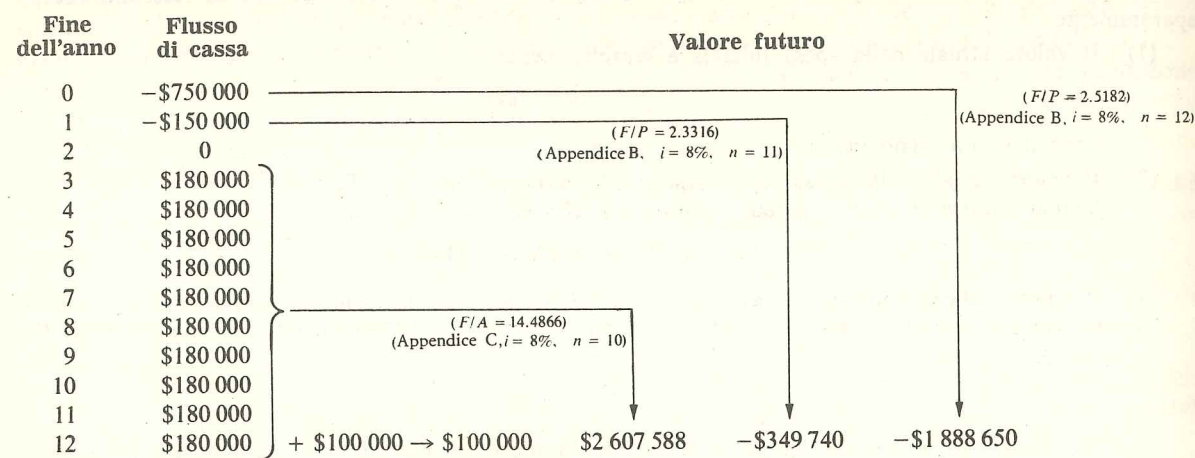


Fig. 6-2

Il valore futuro dell'investimento proposto si può ora ottenere sommando i valori futuri delle componenti separate, come è mostrato nell'ultima riga del diagramma. Con ciò,

$$F = \$100\,000 + \$2\,607\,588 - \$349\,740 - \$1\,888\,650 = \$469\,198$$

Si può anche ottenere il valore futuro di questo investimento moltiplicando il valore attuale per un opportuno fattore di interesse composto. Si è già trovato che $P = \$186\,534$ (v. gli esempi 6.15 e 6.16). L'appendice B mostra che $F/P = 2.5182$ quando $i = 8\%$ ed $n = 12$. Quindi

$$F = (\$186\,534)(2.5182) = \$469\,730$$

risultato che è praticamente lo stesso di quello ottenuto in precedenza. (La differenza fra i due valori è dovuta all'arrotondamento dei fattori tabulati).

6.4 CONFRONTO FRA STRATEGIE DI INVESTIMENTO

L'idea forse più importante nell'economia dell'ingegneria è quella di confrontare una strategia d'investimento con l'altra per trovare la più conveniente. Per fare questo, gli investimenti messi a confronto devono venire espressi mediante uno stesso criterio generale, come può essere il valore attuale. L'investimento che ha il valore attuale più alto sarà il più conveniente.

Esempio 6.18. Una compagnia ha sviluppato due nuovi promettenti prodotti, ma può permettersi di fabbricare e mettere in commercio soltanto uno di essi. Ciascun prodotto richiede un investimento iniziale di 350 000 dollari e si prevede che possa fornire un utile di 720 000 dollari in un periodo di 6 anni. Le entrate previste sono tuttavia distribuite in maniera differente rispetto al tempo, come indicato dai flussi

Tabella 6-1

Prodotto A		Prodotto B	
Fine dell'anno	Flusso di cassa	Fine dell'anno	Flusso di cassa
0	-\$350 000	0	-\$350 000
1	\$120 000	1	\$ 60 000
2	\$120 000	2	\$ 90 000
3	\$120 000	3	\$110 000
4	\$120 000	4	\$130 000
5	\$120 000	5	\$150 000
6	\$120 000	6	\$180 000

di cassa mostrati nella tab. 6-1. Se questa compagnia può normalmente guadagnare l'equivalente del 10% per anno, valutato annualmente, del proprio denaro, su quale prodotto dovrebbe investire tale denaro?

Si determini il valore attuale di ciascun investimento proposto utilizzando il procedimento grafico descritto nel par. 6.3. Dalle figure 6-3 e 6-4, si vede che i due valori attuali sono

$$P_A = -\$350\,000 + \$522\,648 = \$172\,648$$

$$P_B = -\$350\,000 + \$54\,545 + \$74\,380 + \$82\,645 + \$88\,792 + \$93\,138 + \$101\,603 = \$145\,103$$

Poiché il prodotto A ha un valore attuale più alto del prodotto B, la compagnia dovrebbe investire il proprio denaro nel prodotto A.

(Se entrambi i valori attuali fossero risultati negativi, la compagnia non dovrebbe investire in nessuno dei due prodotti, ma dovrebbe guadagnarsi il suo normale 10%. Tuttavia, il prodotto col più alto, cioè meno negativo, valore attuale sarebbe ancora superiore, in quanto la compagnia perderebbe meno investendo in esso.)

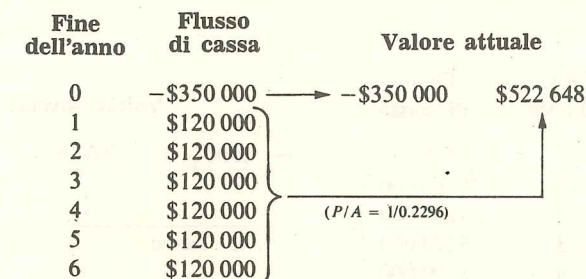


Fig. 6-3. Prodotto A

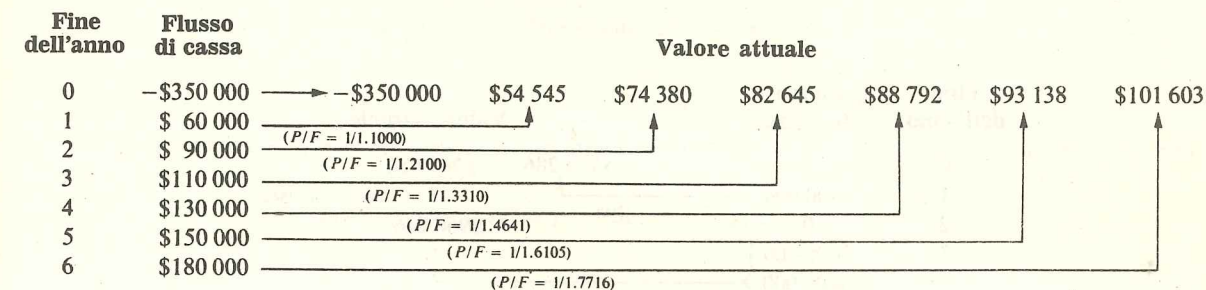


Fig. 6-4. Prodotto B

Il valore futuro si può usare invece del valore attuale nel confrontare una strategia d'investimento con l'altra. Tuttavia, il valore futuro si può ottenere semplicemente moltiplicando il valore attuale per una costante positiva (cioè F/P). Quindi, se una proposta d'investimento ha un valore *attuale* maggiore di una proposta alternativa, allora quella proposta avrà anche un maggior valore *futuro* rispetto alla proposta in competizione con essa. In altre parole, la collocazione relativa dei due investimenti proposti sarà la stessa, indipendentemente dalla scelta del criterio di decisione.

Talvolta gli investimenti in competizione sono proiettati su differenti periodi di tempo. In questi casi il criterio economico (per es. il valore attuale) deve venire valutato nello stesso momento per ciascun investimento.

Esempio 6.19. Determinare quale degli investimenti proposti nella tab. 6-2 è il più conveniente, basandosi sul criterio del valore attuale. Si assuma un tasso d'interesse del 12% all'anno pagato annualmente.

Per confrontare questi due investimenti si valuterà il valore attuale di ciascuno di essi nello stesso momento, vale a dire all'inizio del primo anno (termine dell'anno zero). Si vedano le figg. 6-5 e 6-6.

Si trova

$$P_A = -\$500\,000 + \$607\,533 = \$107\,533$$

$$P_B = -\$714\,286 + \$765\,980 = \$51\,694$$

Tabella 6-2

Investimento A		Investimento B	
Fine dell'anno	Flusso di cassa	Fine dell'anno	Flusso di cassa
0	-\$500 000	0	0
1	\$200 000	1	-\$800 000
2	\$200 000	2	0
3	\$200 000	3	\$400 000
4	\$200 000	4	\$400 000
5	0	5	\$400 000

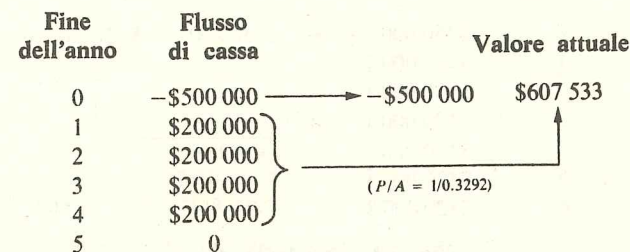


Fig. 6-5. Investimento A

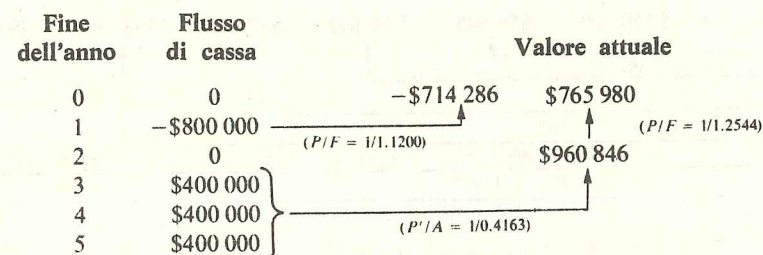


Fig. 6-6. Investimento B

Il valore attuale dell'investimento A è più del doppio di quello dell'investimento B; quindi l'investimento A è da preferire all'investimento B.

È interessante osservare che ad una conclusione completamente differente si perviene se non si tiene conto del valore nel tempo del denaro. Infatti, l'entrata di cassa netta dell'investimento A (non tenendo conto del tasso d'interesse del 12%) è semplicemente

$$(\text{entrata di cassa})_A = -\$500\,000 + 4(\$200\,000) = \$300\,000$$

mentre l'entrata di cassa netta dell'investimento B è

$$(\text{entrata di cassa})_B = -\$800\,000 + 3(\$400\,000) = \$400\,000$$

Poiché B ha un'entrata di cassa netta maggiore di A, si potrebbe essere tentati di concludere che l'investimento B è più conveniente dell'investimento A. Una simile conclusione sarebbe sbagliata.

Valore attuale e valore futuro non sono i soli criteri economici di decisione comunemente usati. Altre misure, come il *tasso di profitto* ed il *guadagno d'investimento*, vengono spesso usate. Una discussione su questi criteri di decisione va tuttavia al di là dello scopo di questo libro.

PROBLEMI RISOLTI

6.1. Determinare il valore del fattore d'interesse composto di pagamenti singoli (F/P) per $n = 18$ ed $i = 5\frac{1}{2}\%$, usando (a) la formula che dà F/P , (b) l'appendice B.

(a) $F/P = (1 + 0.055)^{18} = 2.6215$

(b) L'uso dell'appendice B è meno diretto, in quanto non esiste una voce corrispondente direttamente ad $i = 5\frac{1}{2}\%$. Si può tuttavia interpolare fra i valori tabulati per $i = 5\%$ ed $i = 6\%$. Così facendo, con un'interpolazione lineare nella riga $n = 18$,

$$F/P = 2.4066 + \left(\frac{5.5 - 5.0}{6.0 - 5.0} \right) (2.8543 - 2.4066) = 2.6305$$

Questo valore è vicino, anche se non proprio identico, al valore ottenuto in (a).

6.2. Partendo dall'espressione

$$F/A = (1 + i)^{n-1} + (1 + i)^{n-2} + \cdots + 1$$

per il fattore d'interesse composto di pagamenti annuali uguali, mostrare che

$$F/A = \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

Si moltiplichi la prima delle precedenti equazioni per $1 + i$. Si ha

$$(F/A)(1 + i) = (1 + i)^n + (1 + i)^{n-1} + \cdots + (1 + i)$$

Si sottragga ora da questa equazione l'equazione originaria:

$$(F/A)(1 + i) - (F/A) = [(1 + i)^n + (1 + i)^{n-1} + \cdots + (1 + i)] - [(1 + i)^{n-1} + (1 + i)^{n-2} + \cdots + 1]$$

Tutti i termini in parentesi quadra si annullano ad eccezione del primo e dell'ultimo. Si ha quindi

$$(F/A)(i) = (1 + i)^n - 1 \quad \text{da cui} \quad F/A = \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

6.3. (a) Determinare una formula adatta per il fattore d'interesse composto di pagamenti singoli per il caso in cui l'interesse sia pagato trimestralmente anziché annualmente. Si indichi con n il numero di anni e con i il tasso d'interesse annuale, come in precedenza. (b) Generalizzare il risultato di (a) al caso di *capitalizzazione continua*.

(a) Il tasso d'interesse per ciascun periodo d'interesse sarà $i/4$ ed il numero di periodi di interesse sarà $4n$. Quindi, il fattore d'interesse composto di pagamenti singoli è

$$F/P = \left(1 + \frac{i}{4} \right)^{4n}$$

(b) Per kn periodi d'interesse e per un tasso d'interesse di i/k per un periodo, si ha

$$F/P = \left(1 + \frac{i}{k} \right)^{kn} = \left[\left(1 + \frac{i}{k} \right)^k \right]^n$$

La capitalizzazione continua si ottiene come limite per k , numero di periodi d'interesse per anno, tendente all'infinito. D'altra parte si sa dall'analisi matematica che per $k \rightarrow \infty$,

$$\left(1 + \frac{x}{k} \right)^k \rightarrow e^x$$

per cui

$$F/P \rightarrow [e^i]^n = e^{in}$$

Molti istituti finanziari usano il sistema di capitalizzazione continua, anziché quella discreta (cioè annuale, trimestrale, ecc.).

- 6.4. Uno studente investe 1500 dollari in un conto bancario che rende un interesse del 5% all'anno, capitalizzato trimestralmente. Se lo studente non effettua nessun altro versamento o prelievo, quanto denaro avrà accumulato dopo 20 anni? Si confronti il risultato con quello ottenuto nell'esempio 6.4, relativo ad una capitalizzazione annuale degli interessi.

Utilizzando la formula sviluppata nel problema 6.3(a), si ha

$$F = (\$1500) \left(1 + \frac{0.05}{4} \right)^{(4)(20)} = (\$1500)(1.0125)^{80} = \$4052.23$$

Se l'interesse viene capitalizzato annualmente anziché trimestralmente, si saranno accumulati soltanto 3979.95 dollari (v. l'esempio 6.4), che rappresenta 72.28 dollari in meno rispetto al risultato sopra ottenuto.

- 6.5. Determinare le formule per i rapporti F/A ed A/P per il caso in cui l'interesse venga capitalizzato mensilmente ed i pagamenti vengano fatti mensilmente anziché annualmente. Si indichi con n il numero di anni e con i il tasso d'interesse annuale.

Il tasso d'interesse per ciascun periodo d'interesse sarà $i/12$, ed il numero di periodi di interesse sarà $12n$. Quindi le formule richieste sono

$$F/A = \frac{[1 + (i/12)]^{12n} - 1}{i/12} \quad \text{e} \quad A/P = \frac{(i/12)[1 + (i/12)]^{12n}}{[1 + (i/12)]^{12n} - 1}$$

- 6.6. Un ingegnere decide di prendere in prestito 50 000 dollari per comprarsi una casa. Il tasso d'interesse sia del 9% all'anno, con capitalizzazione mensile. Quale sarà il pagamento mensile che deve effettuare quell'ingegnere se $n = 30$ anni?

Utilizzando la formula per A/P presentata nel problema 6.5, si ha

$$A = (\$50\,000) \frac{(0.09/12)[1 + (0.09/12)]^{(12)(30)}}{[1 + (0.09/12)]^{(12)(30)} - 1} = (\$50\,000) \frac{(0.0075)(1 + 0.0075)^{360}}{(1 + 0.0075)^{360} - 1} = \$402.31$$

L'ingegnere dovrà perciò pagare ogni mese la somma di 402.31 dollari, interessi inclusi.

- 6.7. Determinare (a) il valore attuale, (b) il valore futuro, delle entrate ed uscite di cassa sotto elencate, con riferimento ad un tasso d'interesse del 10% all'anno, capitalizzato annualmente.

Fine dell'anno	0	1	2	3	4	5
Flusso di cassa	-\$25 000	\$10 000	\$12 000	\$10 000	\$15 000	\$20 000

(a) Si veda la fig. 6-7. Il risultato richiesto si ottiene sommando le singole somme componenti della prima riga. Con ciò,

$$P = -\$25\,000 + \$9091 + \$9917 + \$7513 + \$10\,245 + \$12\,418 = \$24\,184$$

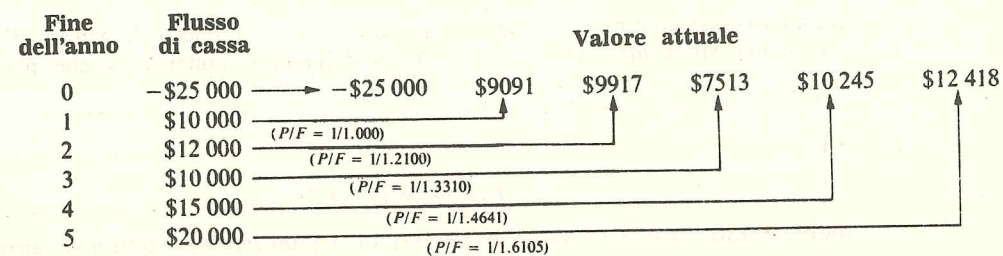


Fig. 6-7

- (b) Si veda la fig. 6-8. Il valore futuro si ottiene sommando le singole somme componenti dell'ultima riga. Ne segue,

$$F = \$20\,000 + \$16\,500 + \$12\,100 + \$15\,972 + \$14\,641 - \$40\,262 = \$38\,951$$

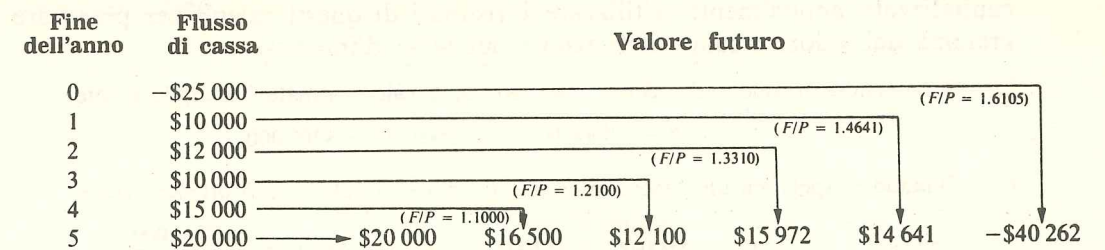


Fig. 6-8

Si sarebbe anche potuto ottenere il valore futuro direttamente dalla parte (a) scrivendo $F = P(F/P)$. Con ciò, si ottiene

$$F = (\$24\,184)(1.6105) = \$38\,948$$

che è praticamente lo stesso valore sopra ottenuto. (I fattori d'interesse composto si ottengono dall'appendice B.)

- 6.8. Si esamini ancora una volta l'investimento proposto descritto nell'esempio 6.15. Il profitto annuale previsto sia pari a 120 000 dollari anziché a 180 000. Quale sarà il valore attuale dell'intero investimento? Qual è il significato del risultato che si ottiene?

Il problema può venire diagrammato come in fig. 6-9. Il valore attuale dell'intero investimento si ottiene sommando le singole componenti della prima riga. Con ciò,

$$P = -\$750\,000 - \$138\,889 + \$690\,474 + \$39\,711 = -\$158\,704$$

Si noti che il risultato finale è negativo. Ciò significa che la compagnia farebbe meglio ad investire in qualche altra maniera il suo denaro, basandosi su un profitto dell'8% all'anno, capitalizzato annualmente.

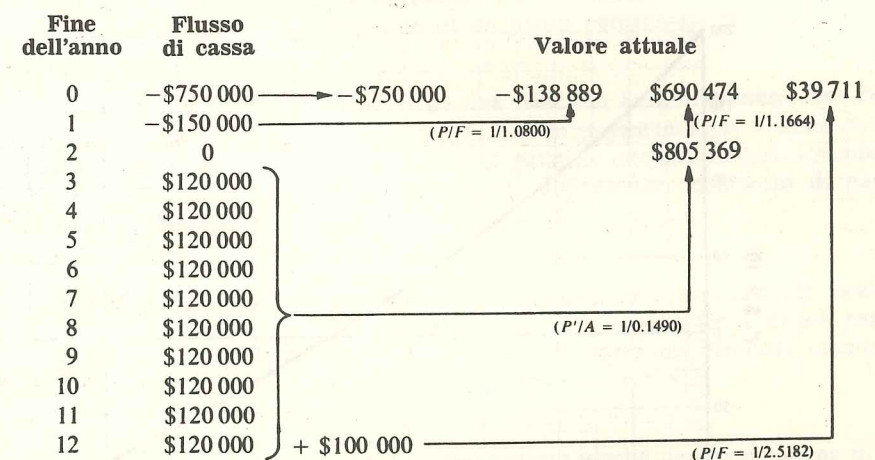


Fig. 6-9

- 6.9. I previsti movimenti di cassa per un investimento proposto sono i seguenti:

Fine dell'anno	0	1	2	3	4
Flusso di cassa	-\$600 000	\$200 000	\$200 000	\$200 000	\$200 000

Determinare il valore attuale dell'investimento proposto (a) ignorando il valore nel tempo del denaro (cioè $i = 0\%$); (b) assumendo un tasso d'interesse equivalente del 5% all'anno, capitalizzato annualmente; (c) assumendo $i = 10\%$, capitalizzato annualmente; (d) assumendo $i = 15\%$, capitalizzato annualmente; (e) assumendo $i = 20\%$, capitalizzato annualmente. Utilizzare i risultati di questi calcoli per preparare un diagramma del valore attuale in funzione del tasso d'interesse.

(a) Se si ignora il valore del denaro nel tempo, il valore attuale è semplicemente

$$P = -\$600\,000 + 4(\$200\,000) = \$200\,000$$

(b) Quando si specifica un tasso d'interesse, il valore attuale si può ottenere come

$$P = -\$600\,000 + (\$200\,000)(P/A) = -\$600\,000 + \frac{\$200\,000}{A/P}$$

Il fattore A/P si può ottenere dalla quarta riga dell'appendice D (poiché $n = 4$). Se $i = 5\%$, $A/P = 0.2820$, per cui

$$P = -\$600\,000 + \frac{\$200\,000}{0.2820} = \$109\,220$$

$$(c) \quad P = -\$600\,000 + \frac{\$200\,000}{0.3155} = \$33\,914$$

$$(d) \quad P = -\$600\,000 + \frac{\$200\,000}{0.3503} = -\$29\,061$$

$$(e) \quad P = -\$600\,000 + \frac{\$200\,000}{0.3863} = -\$82\,268$$

La fig. 6-10 mostra un diagramma del valore attuale (P) in funzione del tasso d'interesse (i). Si noti che il valore attuale diminuisce al crescere del tasso d'interesse. La curva attraversa l'ascissa (cioè $P = 0$) quando $i = 12.5\%$; per valori di i maggiori del 12.5%, il valore attuale è negativo. Un simile andamento è tipico di investimenti di questo tipo (cioè con una spesa iniziale seguita da numerose entrate di cassa).

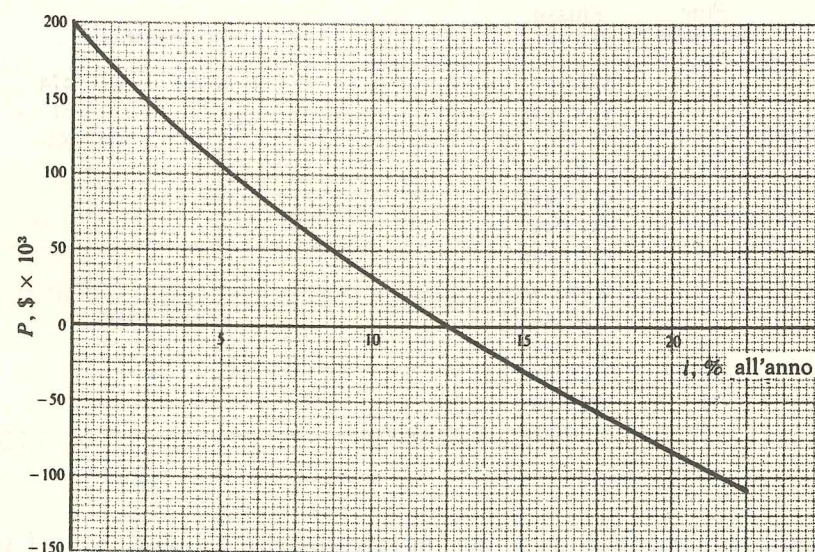


Fig. 6-10

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

Risposte alla maggior parte dei problemi sono fornite alla fine del libro. Vi possono essere piccole discrepanze fra risultati ottenuti dalle appendici B, C e D e risultati ottenuti direttamente dalle formule opportune.

- 6.10. Determinare il fattore F/P , basato su calcoli di interesse semplice, (a) $i = 5\%$, $n = 25$ anni; (b) $i = 7\frac{1}{2}\%$, $n = 12$ anni; (c) $i = 6\frac{3}{4}\%$, $n = 15$ anni; (d) $i = 11\%$, $n = 6$ anni; (e) $i = 12\frac{1}{2}\%$, $n = 20$ anni; (f) $i = 5\frac{1}{8}\%$, $n = 10$ anni. Esprimere i risultati con una precisione fino alla quarta cifra decimale.
- 6.11. Determinare il fattore F/P per ciascuna delle condizioni elencate nel problema 6.10, assumendo che l'interesse venga conteggiato annualmente. Confrontare ciascun valore col valore corrispondente ottenuto nel problema 6.10. Vi sono differenze significative nei risultati?
- 6.12. Uno studente decide di prendere in prestito 2500 dollari per 5 anni al tasso di interesse semplice dell'8% all'anno. Non verranno fatti pagamenti durante tutto il periodo di 5 anni. Alla fine dei 5 anni, tuttavia, lo studente restituirà l'intero prestito, inclusi gli interessi maturati. (a) Quanto denaro dovrà restituire lo studente alla fine dei 5 anni? (b) Qual è il tasso d'interesse composto equivalente, basato su conteggi annuali?
- 6.13. Costruire un grafico di F/P in funzione di n basato su (a) interesse semplice, (b) interesse composto (utilizzando l'appendice B). Riportare entrambe le equazioni sullo stesso grafico. Assumere che $i = 10\%$ all'anno e fare variare n da 0 a 30 anni. Quali conclusioni si possono trarre circa la natura dell'interesse semplice in confronto con l'interesse composto?
- 6.14. Un ingegnere deposita 5000 dollari su un libretto di risparmio, dove gli sarà consentito di accumulare interessi per 20 anni. Non verranno effettuati successivamente né versamenti né prelievi. Calcolare quanto denaro risulterà accumulato al termine dei 20 anni, assumendo un tasso d'interesse (a) del 5% all'anno, capitalizzato annualmente; (b) del 5% all'anno, capitalizzato trimestralmente; (c) del 6% all'anno, capitalizzato annualmente; (d) del 6% all'anno, capitalizzato trimestralmente. Quanto significativa è la differenza fra il computo annuale e trimestrale degli interessi? Quanto significativa è un'aggiunta di un punto percentuale nel tasso d'interesse?
- 6.15. Uno studente prende in prestito 3000 dollari da una banca al tasso d'interesse del 7 $\frac{1}{2}\%$ all'anno, capitalizzato su base annuale. Lo studente non fa nessun pagamento per 4 anni. Al termine dei 4 anni, tuttavia, lo studente intende restituire l'intero prestito, interessi inclusi. Calcolare la somma che deve essere restituita, utilizzando (a) l'equazione dell'interesse composto di pagamenti singoli, (b) l'appendice B ed un'interpolazione.
- 6.16. Nel problema 6.15, si supponga che l'interesse venga conteggiato mensilmente anziché annualmente. Utilizzare la formula adatta dell'interesse composto di pagamenti singoli per calcolare la somma di denaro dovuta dopo 4 anni. Effettuare un confronto col risultato ottenuto nel problema 6.15(a).
- 6.17. Costruire dei grafici che mostrino quanto tempo occorre perché una data somma di denaro risulti raddoppiata, in funzione del tasso d'interesse, nell'ipotesi che l'interesse venga capitalizzato (a) annualmente, (b) trimestralmente, (c) mensilmente. Riportare tutte e tre le curve sullo stesso grafico (una curva per ciascun tipo di capitalizzazione).
- 6.18. Un gruppo di ingegneri costituisce una società di consulenza. Essi vogliono prendere in prestito 20 000 dollari per 3 anni per acquistare mobili d'ufficio e per procurarsi un capitale di lavoro. Se la società deve restituire 25 194.24 dollari al termine dei 3 anni, quale sarà stato il tasso d'interesse sul prestito? (Assumere una capitalizzazione annuale degli interessi.)

- 6.19. Si supponga che una persona depositi 5 000 dollari su un libretto di risparmio che paga un interesse del 6%. Quanto denaro avrà accumulato dopo 25 anni, supponendo che l'interesse venga capitalizzato (a) annualmente, (b) su base trimestrale, (c) mensilmente, (d) in forma continua [v. il problema 6.3(b)]? Quali conclusioni si possono trarre circa la frequenza della capitalizzazione? La capitalizzazione continua offre un vantaggio significativo su quella discreta?
- 6.20. Una compagnia ha recentemente sviluppato una falciatrice per prati con motore azionato a batteria, di alta efficienza ed a buon prezzo. Al momento, la produttività annuale della compagnia è soltanto il 40% della capacità produttiva totale. Tuttavia, la compagnia prevede che le proprie vendite annuali (e quindi la sua produttività annuale) aumenteranno del 9% ogni anno, in seguito ad un'accoglienza crescente da parte dei clienti della falciatrice azionata a batteria in questione. Se le previsioni sono corrette, quanto tempo occorrerà perché la compagnia arrivi a produrre le falciatrici con la piena capacità produttiva?
- 6.21. Determinare il fattore F/A nelle seguenti condizioni, assumendo una capitalizzazione annuale degli interessi: (a) $i = 5\%$, $n = 25$ anni; (b) $i = 7\frac{1}{2}\%$, $n = 12$ anni; (c) $i = 6\frac{3}{4}\%$, $n = 15$ anni; (d) $i = 11\%$, $n = 6$ anni; (e) $i = 12\frac{1}{2}\%$, $n = 20$ anni; (f) $i = 5\frac{1}{8}\%$, $n = 10$ anni. Esprimere i risultati con la precisione fino alla quarta cifra decimale.
- 6.22. Un ingegnere deposita 1000 dollari su un libretto di risparmio alla fine di ogni anno. La banca paga l'interesse del 6%, capitalizzato su base annuale. (a) Quanto denaro avrà accumulato dopo 30 anni? (b) Quanto tempo occorrerà perché l'ingegnere accumuli 100 000 dollari?
- 6.23. Un ingegnere deposita una certa somma di denaro su un libretto di risparmio alla fine di ogni anno. La banca paga un interesse del 6%, capitalizzato annualmente. Quanto denaro deve risparmiare quell'ingegnere ogni anno per accumulare 100 000 dollari dopo 30 anni?
- 6.24. Un ingegnere deposita una certa somma di denaro su un libretto di risparmio all'inizio di ogni anno. La banca paga un interesse del 6%, capitalizzato annualmente. Quanto denaro deve risparmiare ogni anno l'ingegnere per mettere da parte 100 000 dollari dopo 30 anni? Confrontare la risposta col risultato ottenuto nel problema 6.23.
- 6.25. Un paese ha riserve di carbone sufficienti a durare per 400 anni alla velocità annuale di consumo attuale. Si prevede, tuttavia, un aumento della velocità di consumo del 5% ogni anno. Se la previsione è corretta, quanto tempo occorrerà perché le riserve di carbone di quel paese si esauriscano?
- 6.26. Determinare il fattore F/P nelle seguenti condizioni, assumendo una capitalizzazione degli interessi annuali (a) $i = 5\%$, $n = 25$ anni; (b) $i = 7\frac{1}{2}\%$, $n = 12$ anni; (c) $i = 6\frac{3}{4}\%$, $n = 15$ anni; (d) $i = 11\%$, $n = 6$ anni; (e) $i = 12\frac{1}{2}\%$, $n = 20$ anni; (f) $i = 5\frac{1}{8}\%$, $n = 10$ anni. Esprimere i risultati fino alla quarta cifra decimale.
- 6.27. Un ingegnere, che ha accumulato 175 000 dollari su un libretto di risparmio, decide di ritirarsi dall'attività anticipatamente per passare all'insegnamento a tempo definito presso un'università locale. Il libretto di risparmio frutta interessi al tasso del 6% all'anno, capitalizzato annualmente. (a) Qual è la somma fissa massima che l'ingegnere può prelevare al termine di ciascun anno per 20 anni? (b) Se l'ingegnere preleva 20 000 dollari al termine di ogni anno, quanto tempo occorrerà perché il libretto di risparmio risulti esaurito? (c) Se l'ingegnere preleva 10 500 dollari alla fine di ogni anno, in quanto tempo esaurirà i suoi risparmi?
- 6.28. Una compagnia chimica ha sviluppato un nuovo materiale plastico leggero e di alta resistenza. La compagnia ha in programma di spendere 6 milioni di dollari per le necessità di fabbricazione, al fine di iniziare una produzione a pieno ritmo. Si prevede che la compagnia ricaverà un profitto di un milione di dollari all'anno per 10 anni. A quale tasso d'interesse corrisponde un tale profitto, assumendo la capitalizzazione annuale degli interessi?

- 6.29. Uno studente decide di prendere in prestito 2500 dollari ad un tasso d'interesse dell'8% per anno, conteggiato annualmente. Il prestito sarà restituito in 5 annualità uguali. (a) Quanto denaro dovrà restituire lo studente alla fine di ogni anno? (b) Quale sarà l'ammontare totale degli interessi pagati sull'intera durata del prestito?
- 6.30. Un filosofo ha appena vinto il premio di un milione di dollari nella lotteria di stato. Gli si offre la scelta fra il ricevere 50 000 dollari l'anno per 20 anni o l'accettare un pagamento in un'unica soluzione di 650 000 dollari. Si supponga che egli sia in grado di depositare il suo denaro su un libretto di risparmio che fruttu un interesse del $5\frac{1}{2}\%$ all'anno, con gli interessi capitalizzati annualmente. (a) Qual è la migliore linea d'azione, se si trascurano le tasse sui profitti? (b) La decisione presa su queste basi rimane verosimilmente valida una volta che vengano presi in considerazione gli obblighi della tassazione?
- 6.31. La maggior parte dei prestiti per l'acquisto di automobili sono tali che il costo totale del prestito si determina con la formula dell'interesse semplice. Questo costo totale viene poi diviso per il numero di pagamenti mensili per ottenere la somma dovuta ogni mese. Scrivere un'equazione per l'ammontare di ciascun pagamento mensile.
- 6.32. Una ragazza appena laureatasi in ingegneria decide di acquistare una lussuosa auto sportiva. Per fare questo deve prendere in prestito 6000 dollari, che ella pensa di restituire in rate mensili in un periodo di 4 anni. Le si offrono due possibilità:
(a) Può ottenere un prestito per un acquisto di automobili del tipo ad interesse semplice da una banca locale, ad un tasso d'interesse del 7% all'anno (v. il problema 6.31).
(b) Può ottenere un prestito convenzionale dal suo istituto di credito, ad un tasso d'interesse del 12% all'anno, con gli interessi capitalizzati mensilmente (v. il problema 6.5).
Determinare quale dei due prestiti sarebbe il più conveniente.
- 6.33. Un ingegnere decide di prendere in prestito 65 000 dollari per 25 anni per comprarsi una casa. Se il tasso d'interesse è dell'8 $\frac{1}{2}\%$ all'anno, con interessi capitalizzati mensilmente, trovare (a) il pagamento mensile che deve fare l'ingegnere (v. il problema 6.6), (b) la somma totale pagata nei 25 anni.
- 6.34. Una fabbrica di forni ha appena progettato un nuovo forno a basso consumo energetico per uso commerciale. Per dare il via alla produzione, la compagnia decide di prendere in prestito 800 000 dollari ad un tasso d'interesse del 10% per anno, capitalizzato annualmente. Il prestito verrà restituito in 7 annualità uguali. (a) Determinare l'ammontare di ciascun pagamento annuale. (b) Quale sarà il costo totale del prestito (cioè l'ammontare totale degli interessi pagato)? (c) Quale sarebbe il costo totale del prestito se il tasso d'interesse fosse del 9% per anno anziché del 10%? Una simile riduzione di un punto percentuale è significativa?
- 6.35. Determinare il valore attuale del seguente investimento proposto.
- | | | | | | | | |
|-----------------------------------|-------|---|-----|-----|-----|-----|-----|
| Fine dell'anno | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Flusso di cassa, $\$ \times 10^3$ | -1000 | 0 | 250 | 250 | 250 | 250 | 300 |
- Scegliere un tasso d'interesse annuale pari a (a) 0%, (b) 4%, (c) 7%, (d) 10%. Assumere una capitalizzazione annuale degli interessi.
- 6.36. Rappresentare graficamente il valore attuale in funzione del tasso d'interesse annuale utilizzando i risultati ottenuti nel problema 6.35. A quale tasso d'interesse annuale il valore attuale sarà uguale a zero? Qual è il significato di un valore attuale di investimento uguale a zero?
- 6.37. Calcolare il valore futuro dell'investimento proposto dato nel problema 6.35, per ciascuno dei tassi d'interesse specificati. Ricavare il valore futuro direttamente, anziché dal valore attuale. (Quest'ultimo calcolo può comunque venire effettuato come controllo).

6.38. Rappresentare graficamente il valore futuro in funzione del tasso d'interesse annuale utilizzando i risultati ottenuti nel problema 6.37. A quale tasso d'interesse annuale il valore futuro dell'investimento sarà uguale a zero. Fare un confronto col valore zero del valore attuale ottenuto nel problema 6.36.

6.39. Calcolare il valore attuale ed il valore futuro dei seguenti investimenti proposti, basandosi su un tasso d'interesse del 12% all'anno, con gli interessi conteggiati annualmente.

Fine dell'anno	0	1	2	3	4	5	6	7
Flusso di cassa, \$ $\times 10^3$	-2.5	-1.2	0.5	0.8	1.0	1.2	1.5	1.8

6.40. Determinare quale degli investimenti della tab. 6-3 è il più conveniente.

Tabella 6-3

Investimento A		Investimento B	
Fine dell'anno	Flusso di cassa	Fine dell'anno	Flusso di cassa
0	-\$500 000	0	-\$500 000
1	\$150 000	1	\$ 50 000
2	\$150 000	2	\$ 70 000
3	\$150 000	3	\$100 000
4	\$150 000	4	\$200 000
5	\$150 000	5	\$400 000

Basare i calcoli su conteggi annuali degli interessi, utilizzando un tasso di interesse (α) dello 0% per anno, (b) del 5% per anno, (c) del 10% per anno. La scelta fra gli investimenti è influenzata dal tasso d'interesse?

6.41. Determinare quale degli investimenti della tab. 6-4 è il più conveniente, basandosi su un tasso di interesse dell'8% per anno, conteggiato annualmente.

Tabella 6-4

Investimento A		Investimento B	
Fine dell'anno	Flusso di cassa	Fine dell'anno	Flusso di cassa
0	-\$750 000	0	-\$450 000
1	0	1	-\$400 000
2	\$150 000	2	\$100 000
3	\$150 000	3	\$150 000
4	\$200 000	4	\$200 000
5	\$200 000	5	\$250 000
6	\$200 000	6	\$250 000
7	\$200 000	7	\$250 000

Come si potrebbero confrontare i due investimenti se non si tenesse in considerazione il valore del denaro nel tempo?

6.42. Una fabbrica di automobili programma di investire 27 milioni di dollari allo scopo di espandere i propri servizi di produzione. Due differenti proposte sono da prendere in considerazione.

La prima proposta è quella di ampliare un impianto di montaggio esistente nel centro-ovest. Questo permetterebbe alla fabbrica di produrre 50 000 automobili in più all'anno. La compagnia realizza un profitto netto medio di 200 dollari per automobile in questo impianto.

La seconda proposta è di costruire un nuovo impianto di montaggio sulla costa occidentale. Questo impianto avrà una produzione annuale di sole 40 000 automobili all'anno, ma la compagnia prevede di realizzare un profitto di 300 dollari per automobile.

L'impianto centro-occidentale può iniziare la produzione fin dal primo anno (cioè nello stesso anno in cui fa l'investimento iniziale). Per contro l'impianto della costa occidentale richiede un anno di avviamento, per cui la produzione non inizierà prima del secondo anno. Si suppone che ciascun impianto di montaggio abbia una durata di vita di 5 anni di produzione effettiva.

Se la compagnia utilizza un tasso d'interesse equivalente del 12% all'anno, con gli interessi capitalizzati annualmente, qual è la proposta migliore?

6.43. Nel problema 6.42, si supponga che il profitto previsto per automobile si riduca a 265 dollari nell'impianto della costa occidentale a causa dei più elevati costi del lavoro e dei servizi. Quale proposta sarà ora più conveniente?

6.44. Un grosso ufficio regionale di una fabbrica di computer ha bisogno di ulteriori 400 000 piedi quadrati di spazio per immagazzinamento. Una proposta è quella di erigere ora un edificio di 400 000 ft², ad un costo di 12.50 dollari per ft². Un'altra proposta è di costruire ora un edificio di 250 000 ft², ad un costo di 13.00 dollari per ft², e di aggiungervi poi gli altri 150 000 ft² a distanza di 3 anni da ora, ad un costo di 15.00 dollari per ft². Qual è la proposta migliore, sulla base di un tasso d'interesse annuale dell'8%?

6.45. Per la situazione illustrata nel problema 6.44, si supponga che il tasso d'interesse annuale sia del 12% anziché dell'8%. Quale sarebbe la proposta migliore?

CAPITOLO 7

Introduzione ai calcolatori elettronici

Nessun singolo progresso tecnologico ha mai avuto un così grande impatto sulla pratica dell'ingegneria come lo sviluppo degli elaboratori (« computer ») digitali. Utilizzando un computer, gli ingegneri sono in grado di effettuare un enorme numero di calcoli molto rapidamente, facilmente ed a basso costo. Ciò consente loro di esplorare molte alternative differenti, affidando a tal punto i loro calcoli di progetto che un prodotto superiore può venire sviluppato ad un costo ragionevole.

I calcolatori più vecchi erano macchine molto grosse e per uso generale. Calcolatori di questo tipo sono ancora di impiego comune; infatti i loro costi sono diminuiti drasticamente e la loro efficienza è aumentata enormemente negli ultimi anni. I calcoli scientifici e di ingegneria particolarmente sofisticati vengono di solito effettuati su calcolatori di questo tipo.

In anni più recenti si è verificata una tendenza verso calcolatori elettronici più piccoli e meno costosi (minicomputer). Molte di queste macchine sono sufficientemente piccole da poter essere sistemate sul piano di una scrivania. I minicomputer vengono utilizzati specialmente per tutta un'ampia varietà di applicazioni tecniche e commerciali, di carattere ripetitivo e meno complicate. Il loro impiego è *complementare* (piuttosto che *sostitutivo*) all'impiego dei grossi calcolatori per uso generale.

Un'altra innovazione molto significativa è stata lo sviluppo dei microcalcolatori (*microcomputer*). Un microcomputer è praticamente un calcolatore digitale completo su un singolo circuito elettronico integrato (*chip*), delle dimensioni non superiori a $4 \times 4 \text{ mm}^2$. Queste macchine vengono ampiamente usate nel controllo di processo e nelle fabbricazioni automatizzate. Molti articoli di consumo, come orologi digitali, macchine fotografiche automatiche, e giochi televisivi sono basati su microcomputer.

7.1 CARATTERISTICHE DI UN ELABORATORE ELETTRONICO

Un calcolatore digitale è fondamentalmente un dispositivo elettronico che può trasmettere, immagazzinare e manipolare informazioni (*dati*). I calcoli tecnici implicano solitamente l'elaborazione di dati *numerici*, sebbene siano anche del tutto comuni applicazioni che implicano dati del tipo *a caratteri* (per es. nomi, indirizzi, ecc.).

Perché possa elaborare un particolare gruppo di dati, al calcolatore si deve fornire un opportuno gruppo di istruzioni (un *programma*). Queste istruzioni vengono immagazzinate in una parte della *memoria* del calcolatore per tutto il tempo in cui esse sono necessarie.

In qualsiasi momento un programma memorizzato può venire *eseguito*, col che succedono le seguenti cose.

1. Un gruppo di informazioni chiamate i *dati di input* entreranno nel computer (da un lettore di schede, dal terminale di una telescrivente ecc.) e verranno immagazzinate in una parte della memoria del computer stesso.
2. I dati di input verranno poi elaborati per produrre certi risultati desiderati noti come i *dati di output*.
3. I dati di output (e talvolta alcuni dei dati di input) verranno stampati su un foglio di carta ovvero visualizzati su uno schermo video.

Questo procedimento a tre passi può venire ripetuto quante volte si desidera di modo che una grande quantità di dati può venire elaborata in rapida sequenza.

Esempio 7.1. Un computer è stato programmato per calcolare l'area di un cerchio mediante la formula $A = \pi r^2$, assegnando un valore numerico per il raggio r come dato di input. I passi implicati sarebbero i seguenti:

1. Leggere il valore numerico del raggio del cerchio
2. Calcolare il valore dell'area, utilizzando la formula di cui sopra.

3. Stampare i valori del raggio e dell'area corrispondente
4. Stop.

Ciascuno di questi passi potrebbe corrispondere ad una istruzione in un programma di computer.

L'intero procedimento può venire rappresentato graficamente come è mostrato in fig. 7-1. Una simile rappresentazione è detta « flowchart » o *diagramma di flusso*. Questi diagrammi di flusso possono essere molto utili nell'assistere il lettore nel visualizzare la logica di un programma.

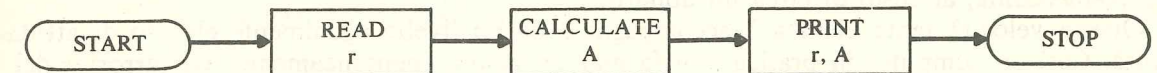


Fig. 7-1

La discussione precedente illustra due importanti caratteristiche di un calcolatore digitale: la *memoria* e la *capacità di venire programmato*. Una terza importante caratteristica è la sua *velocità ed affidabilità*. Nei prossimi pochi paragrafi diremo qualcosa di più sulla memoria, sulla velocità e sull'affidabilità. L'argomento della programmabilità verrà discusso estesamente nell'ultima parte di questo capitolo.

Memoria

I moderni elaboratori elettronici hanno memorie le cui dimensioni vanno da poche migliaia a parecchie centinaia di migliaia di parole dove una *parola* può rappresentare un'istruzione, una quantità numerica o un gruppo di caratteri. (Un *carattere* può essere una lettera, una cifra, una virgola, un punto interrogativo, un segno più, ecc.) Le dimensioni della memoria di un computer vengono di solito espresse come multipli di $2^{10} = 1024$ parole. Questa quantità viene indicata come 1 K. I microcalcolatori attuali, come ad es. il circuito elettronico integrato mostrato in fig. 7-2, hanno in genere memorie che vanno da 4 K a 16 K; stanno diventando sempre più comuni microcalcolatori da 32 K. I grossi elaboratori scientifici hanno in genere memorie dell'ordine di 1000 K.

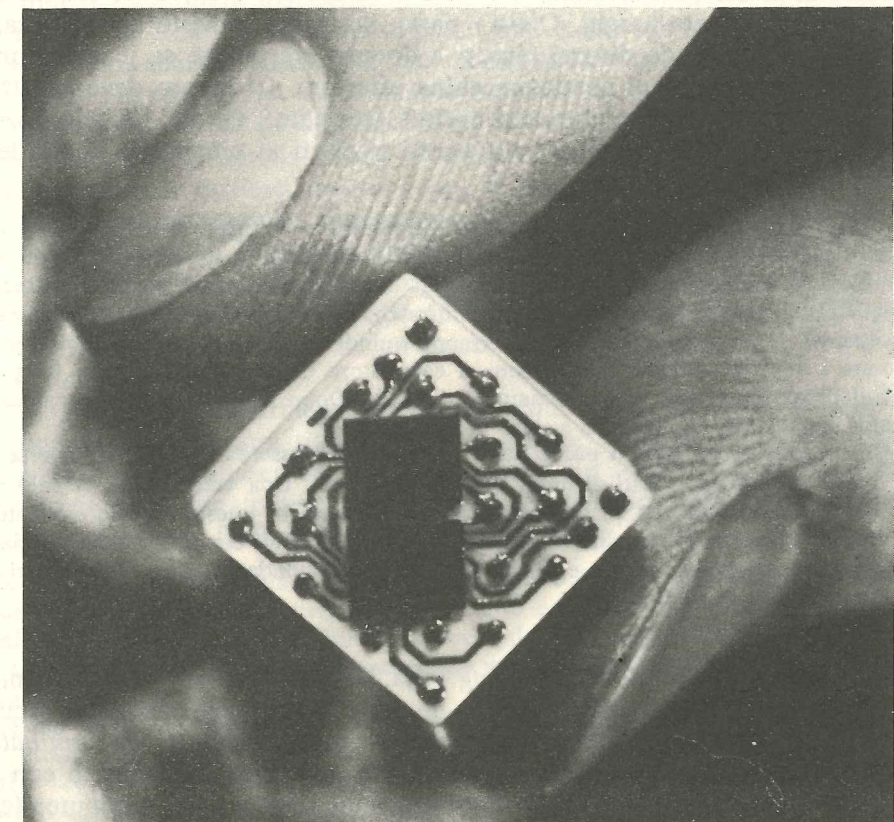


Fig. 7-2

Velocità ed affidabilità

A causa della sua velocità estremamente elevata, un computer può effettuare in pochi minuti calcoli che richiederebbero mesi, e forse anche anni, se venissero effettuati a mano. Operazioni semplici, come l'addizione di due numeri, possono venire effettuate in una frazione di microsecondo ($1 \mu s = 10^{-6} s$). Su un piano più pratico, i voti di fine-semester di tutti gli studenti di una grande università possono venire in genere elaborati in pochi secondi di tempo-macchina, al costo di circa un dollaro.

Questa velocità tanto elevata è accompagnata da un livello egualmente elevato di affidabilità. Così un computer in pratica non fa mai un errore spontaneamente. Gli errori « del computer » di cui tanto volentieri si parla, come quello di una persona che riceve un conto mensile di oltre un milione di dollari dal suo fornitore, sono quasi sempre il risultato di un errore di programmazione o di un errore nella trasmissione dei dati.

7.2 MODI DI OPERARE

Vi sono due differenti modi in cui può venire utilizzato un servizio di calcolo con computer: in *batch* (cioè su schede) ed in *time-sharing* (cioè per accesso diretto e contemporaneo al calcolatore con « divisione di tempo » fra i terminali). Entrambi questi modi sono molto comuni, e ciascuno ha i propri vantaggi per certi tipi di problemi.

Elaborazione in batch

Nell'*elaborazione in batch*, il calcolatore legge un certo numero di lavori (*job*) e li elabora in sequenza. (Per *job* = lavoro si intende l'insieme del programma del computer e dei dati d'ingresso che devono venire elaborati.) Di solito, il programma ed i dati sono registrati su schede perforate; vi sarà così un particolare pacco di schede perforate per ogni *job*. Le informazioni registrate sulle schede verranno quindi passate al calcolatore mediante un lettore di schede meccanico. I risultati, insieme alla lista (*listing*) contenente il programma di calcolo, verranno stampati su grandi fogli di carta da una stampante ad alta velocità.

Nell'*elaborazione in batch* grandi quantità di informazioni (sia programmi sia dati) possono venire trasmesse in ingresso ed in uscita dal calcolatore molto rapidamente. Questo modo di operare è quindi particolarmente adatto a lavori che richiedono lunghi tempi-macchina o che sono fisicamente lunghi. D'altra parte, il tempo richiesto per elaborare un lavoro in questo modo può variare da diversi minuti a diverse ore, anche se il lavoro può avere richiesto solo un secondo o due di tempo-macchina effettivo. (Il lavoro deve aspettare il proprio turno prima di poter essere letto, elaborato e stampato.) Perciò, quando è necessario elaborare lavori semplici, molto piccoli, ed ottenere i risultati al più presto possibile, operare in batch può non risultare opportuno.

Esempio 7.2. Uno studente dispone di 1000 valori differenti per il raggio di un cerchio e vuole calcolare il valore dell'area per ciascun raggio. Per fare questo, egli deve eseguire un programma al calcolatore simile a quello descritto nell'esempio 7.1, ripetendolo 1000 volte, una volta per ogni valore del raggio (v. il problema 7.1). Si farà uso dell'*elaborazione in batch*, poiché tutti i calcoli devono essere effettuati in rapida successione. Il programma ed i dati verranno quindi registrati su schede perforate.

Per elaborare i dati, lo studente farà leggere al calcolatore il pacco delle schede. La prima parte del pacco conterrà il programma, con una istruzione per scheda. Dopo il programma vi saranno 1000 schede dei dati, ciascuna delle quali conterrà un valore del raggio.

Dopo che il calcolatore ha letto il pacco delle schede, vi può essere un ritardo di diverse ore prima che il programma venga eseguito ed i dati di input vengano elaborati. Una volta che il calcolo sia stato completato, i risultati verranno stampati su un grande foglio di carta. In questo caso lo studente riceverà un *listing* che contiene l'effettivo programma di calcolo, seguito da 1000 coppie di numeri, ciascuna delle quali rappresenterà un valore del raggio e quello dell'area corrispondente. Una parte dei risultati forniti dal calcolatore è mostrata in fig. 7-3.

Time-sharing

Il modo di operare detto in *time-sharing* (alla lettera: « spartizione del tempo ») comporta l'utilizzazione simultanea del computer da parte di più utenti diversi, ciascuno dei quali può comunicare col computer tramite un *terminale di time-sharing* (o un *terminale a telescrivente*), che può venire collegato al computer mediante una linea telefonica o con un circuito a microonde. Questi terminali possono trovarsi a grande distanza dal computer (cioè dall'*unità centrale*), talvolta anche a parecchie centinaia di chilometri. Poiché tutti i terminali pos-

R= 21.7873	A= 1491.27	R= 99.2458	A= 30943.8
R= 69.6209	A= 15227.5	R= 68.785	A= 14864.
R= 29.751	A= 2780.7	R= 61.9773	A= 12067.5
R= 96.3794	A= 29182.2	R= 73.1568	A= 16813.5
R= 46.3246	A= 6741.75		
R= 76.7746	A= 18517.6		
R= 82.9399	A= 21611.1		
R= 18.1667	A= 1036.82		
R= 15.9454	A= 798.773		
R= 6.52568	A= 133.783		
R= 79.3194	A= 19765.5		
R= 64.4913	A= 13066.3		
R= 92.7201	A= 27008.3		
R= 89.4656	A= 25145.6		
R= 97.4861	A= 29856.2		
R= 80.4367	A= 20326.3		

Fig. 7-3

sono venire serviti praticamente nello stesso istante, ciascun utente non si renderà conto della presenza degli altri e gli sembrerà di avere l'intero elaboratore a sua completa disposizione.

In fig. 7-4 è mostrato un tipico terminale di *time-sharing*. Questo tipo di terminale è talvolta chiamato terminale « a documento stampato », in quanto una registrazione permanente della sezione di *time-sharing* viene stampata su carta. Altri tipi di terminali usano tubi a raggi catodici (CRT), simili agli schermi televisivi, per visualizzare le informazioni. Con un terminale del tipo CRT non è possibile ottenere una registrazione permanente (« a stampa ») della sezione di *time-sharing*. Terminali più recenti includono sia un visualizzatore CRT sia un sistema per la stampa di una registrazione permanente.

Di solito un unico terminale di *time-sharing* serve sia come dispositivo di introduzione dei dati sia come gestione dei dati in uscita. Il programma ed i dati di input vengono introdotti nel calcolatore tramite la tastiera, mentre i dati di output vengono trasmessi dal computer al terminale, dove vengono stampati oppure visualizzati. La trasmissione dei dati al terminale e dal terminale al computer è tuttavia molto più lenta della elaborazione dei dati da parte del computer. (I lettori di schede e le stampanti usate nell'*elaborazione in batch* sono in grado di trasmettere i dati molto più rapidamente dei terminali a telescrivente.) È proprio questa differenza di velocità che permette ad un calcolatore di interagire con diversi terminali di *time-sharing* contemporaneamente.

Il *time-sharing* è particolarmente adatto per elaborare lavori relativamente semplici che non richiedono un'estesa trasmissione di dati o grande impegno di tempo-macchina. Molte delle applicazioni del computer che si presentano nelle scuole e negli uffici commerciali hanno caratteristiche di questo tipo; per cui queste applicazioni possono venire elaborate in *time-sharing* rapidamente, facilmente e con minima spesa.

Esempio 7.3. Una grande università ha un impianto di *time-sharing* costituito da 100 terminali a telescrivente, collocati in diversi punti del territorio universitario e collegati ad un grosso computer attraverso linee telefoniche. Ciascun terminale trasmette o riceve dati dal computer ad una velocità massima di 30 caratteri al secondo. Tutti i terminali possono venire usati simultaneamente, anche se interagiscono con un unico calcolatore.

Al computer vengono collegati altri 20 terminali: di questi, 15 sono collocati in 5 scuole superiori situate nella stessa area, mentre i rimanenti 5 terminali sono installati in un laboratorio di ricerca governativo. Tutti i 120 terminali possono essere usati (il che accade frequentemente) nello stesso istante. Suddividendo il computer in questo modo, ciascun istituto è in grado di utilizzare i servizi di un grosso elaboratore ad un costo ragionevole.

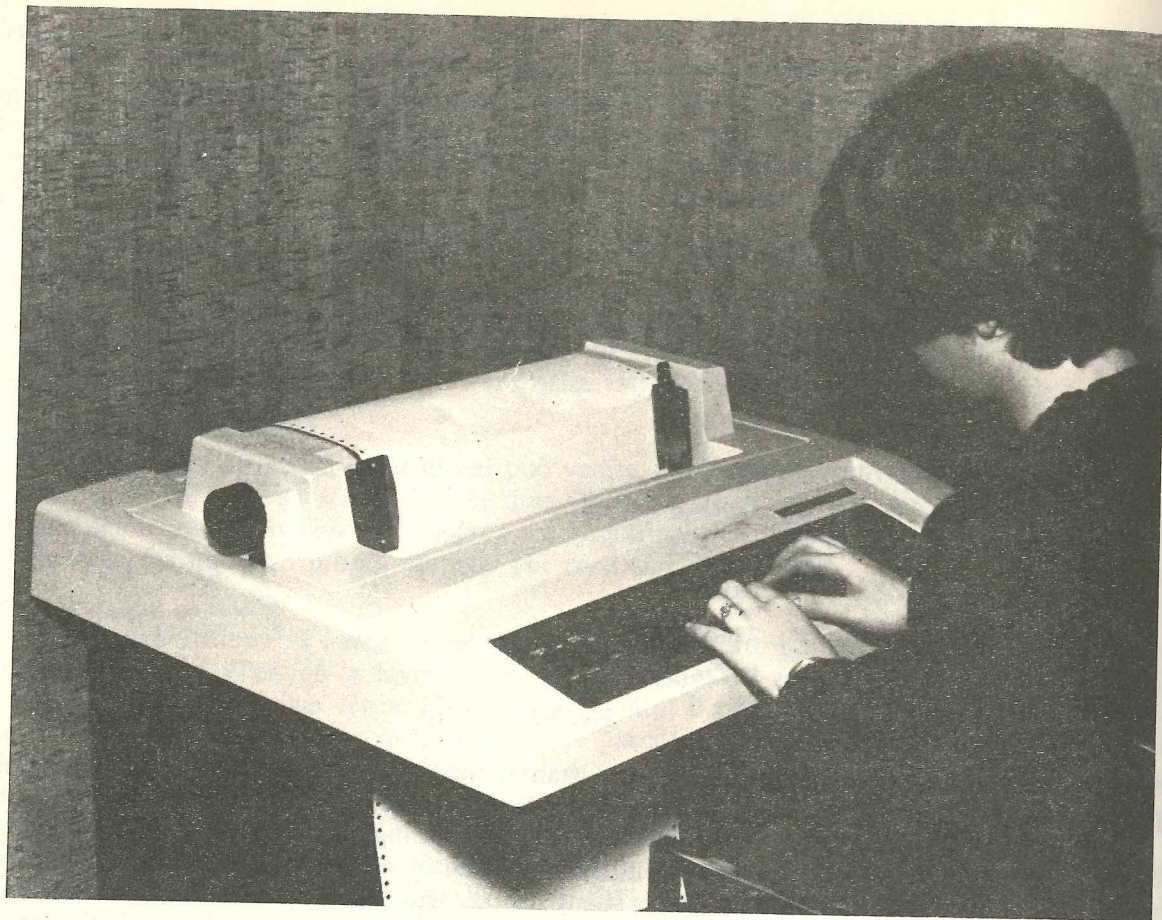


Fig. 7-4

Esempio 7.4. Uno studente ha elaborato un programma di calcolo che intende eseguire in time-sharing. Per fare questo, egli deve battere il suo programma alla telescrivente del terminale, una istruzione per riga. A mano a mano che vengono battute, le istruzioni vengono trasmesse al calcolatore, dove vengono immagazzinate in memoria.

Dopo che l'intero programma è stato battuto e memorizzato, lo studente può fare eseguire il suo programma semplicemente battendo la parola RUN sulla tastiera della telescrivente. Devono allora venire battuti i dati di input richiesti. Non appena tutti i dati di input sono stati immessi nel calcolatore, vengono automaticamente calcolati quelli di uscita, che vengono poi trasmessi direttamente al terminale, dove risultano anche battuti sulla telescrivente.

Un'importante caratteristica del time-sharing è la possibilità che viene lasciata al calcolatore ed all'utente di *interagire* l'uno con l'altro durante l'esecuzione del programma. In questo modo, si può eseguire una parte relativamente piccola del programma e stampare un messaggio che indica i risultati preliminari che sono stati ottenuti nel calcolo e richiedere altri dati all'utente. Fino a che questi dati aggiuntivi non saranno stati forniti, l'ulteriore esecuzione del programma sarà sospesa.

Nel fornire i dati richiesti, l'utente può tener conto dei risultati preliminari già ottenuti; invero, egli potrebbe aver bisogno di esaminare i dati di output prima di fornire qualsiasi altro dato addizionale. Inoltre, i particolari dati forniti dall'utente possono influire sul modo con cui il resto del programma verrà eseguito. Si può dire quindi che il computer e l'utente stiano in un certo senso « conversando » fra loro, poiché le informazioni fornite da uno degli interlocutori possono influenzare le successive azioni dell'altro.

I programmi che sfruttano questa idea vengono scritti in un modo che viene detto *conversazionale*. Esempi caratteristici di programmi interattivi (o conversazionali) sono quelli usati nei giochi col calcolatore, come il filetto, la dama o gli scacchi.

Se lo si desidera, certe caratteristiche dei modi di operare in batch e in time-sharing possono venire combinate fra loro. Per esempio, è possibile introdurre nel calcolatore una serie di dati di input direttamente da un terminale a telescrivente (eliminando così la necessità di perforare le schede) e procedere poi all'elaborazione dei dati col sistema batch. Un'altra possibilità è quella di usare un lettore di schede (elaborazione in batch) per introdurre un programma ed un gruppo di dati di ingresso nel calcolatore, e quindi elaborare i dati col sistema time-sharing. Operazioni « ibride » di questo tipo stanno diventando sempre più comuni, via via che i sistemi di calcolo mediante computer diventano più sofisticati.

7.3 OPERAZIONI FONDAMENTALI DI PROGRAMMAZIONE

Vi sono cinque operazioni fondamentali di programmazione che costituiscono la base praticamente per tutti i programmi di calcolo al computer, indipendentemente dal particolare problema da risolvere, dal computer usato o dal linguaggio di programmazione prescelto.

Valutazione numerica

La valutazione numerica implica le operazioni aritmetiche di base: addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione ed elevazione a potenza. L'uso di queste cinque operazioni permette di valutare numericamente le espressioni algebriche.

Confronto logico

Il confronto logico implica un confronto fra due quantità numeriche per vedere se sono uguali, ovvero per determinare se uno dei due numeri è maggiore dell'altro. (Si può fare un confronto logico anche fra due gruppi di caratteri per vedere se sono uguali oppure no, cioè se il primo gruppo è la stessa cosa del secondo gruppo.) Tali confronti sono richiesti per effettuare operazioni di diramazione (o di estensione, indicate più correntemente come *operazioni di branching*) e certi tipi di operazioni di ripetizione (dette correntemente *operazioni di looping*), come verrà chiarito più avanti.

Esempio 7.5. Si deve preparare un programma al computer per calcolare y in funzione di x , dove

$$y = \begin{cases} 0.5x & x \leq 4 \\ 2x - 6 & x > 4 \end{cases}$$

Poiché verrà scelta una di due equazioni differenti, il programma deve contenere un confronto logico fra il dato valore di x ed il valore costante 4. La scelta dell'equazione adatta dipenderà dall'esito di questo confronto (v. l'esempio 7.6).

Branching (estensione, diramazione)

In un'operazione di branching si effettua un trasferimento (un « salto » o *jump*) ad una parte o all'altra fra le molte parti differenti di un programma al calcolatore, in relazione con l'esito di un confronto logico. Questo consente di includere varie « opzioni » all'interno del programma.

Esempio 7.6 Un diagramma di flusso per il programma dell'esempio 7.5 è mostrato in fig. 7-5. Si osservi che il confronto logico è racchiuso entro il simbolo a forma di rombo, con i due punti (:) che separano le quantità che devono venire confrontate. Il programma si dirama allora a sinistra se $x \leq 4$ e a destra se $x > 4$. Viene quindi effettuata l'appropriata valutazione numerica.

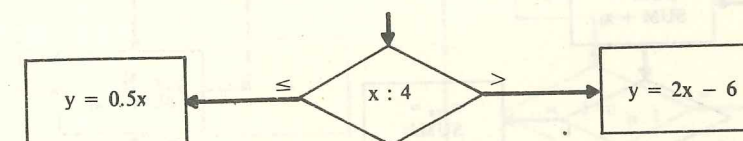


Fig. 7-5

Operazioni di branching sono incluse nella maggior parte dei programmi di calcolo al computer. Molte applicazioni scientifiche e tecniche richiedono anzi numerose operazioni di branching in vari punti di un singolo programma.

Looping (ripetizione)

In un'operazione di looping, una parte di un programma di calcolo al computer viene ripetuta molte volte, una di seguito all'altra, fino a che non risulti soddisfatta una specifica condizione di arresto dei calcoli. Il tipo più comune di condizione di arresto comporta l'impiego di un *contatore*, che segna un incremento di 1 dopo ogni esecuzione di un ciclo (*loop*); l'operazione di looping termina quindi una volta che il contatore raggiunge un qualche valore specificato. S'impiega una operazione di branching (cioè un salto al di fuori del loop) per determinare l'effettivo arresto dei calcoli.

Esempio 7.7 Una parte di un programma per computer effettua il calcolo della media di n valori differenti di x , cioè

$$x_{\text{avg}} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

assumendo che n , il numero di valori di x , sia noto e che i valori attuali della x siano immagazzinati nella memoria del calcolatore. Il calcolo si può effettuare facilmente utilizzando un loop per determinare la somma cumulativa

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

La fig. 7-6 mostra un diagramma di flusso del procedimento. All'inizio, SUM è posta uguale a zero. Ogni iterazione entro il loop aggiunge uno dei valori di x alla SUM. Questo si indica scrivendo $\text{SUM} = \text{SUM} + x_i$ (cioè il nuovo valore di SUM è uguale al valore vecchio più il valore della x_i attuale). Dopo n ripetizioni, SUM rappresenterà la somma cumulativa

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

Si noti che al contatore I si assegna inizialmente il valore 1, prima di iniziare il primo loop. Successivamente la cifra segnata dal contatore verrà aumentata di 1 ad ogni ciclo. Questo fatto viene rappresentato scrivendo $I = I + 1$ (cioè il nuovo valore di I è uguale a quello vecchio più 1). Il loop termina dopo n passaggi (cioè quando $I = n$), indicati dal confronto logico fra I ed n . La media richiesta si ottiene poi semplicemente dividendo SUM per n .

Un altro modo di rappresentare questa operazione di looping è illustrato in fig. 7-7. Si noti che il loop attuale viene ora racchiuso entro un rettangolo tratteggiato. Il primo blocco all'interno del loop, contrassegnato con

FOR $I = 1$ TO n

indica che il loop verrà eseguito n volte ($I = 1$ al primo passaggio, $I = 2$ nel secondo passaggio, ecc., fino ad $I = n$ nell'ultimo passaggio). In tal modo non è necessario incrementare il contatore ($I = I + 1$) o includere un'operazione di branching ($I : n$) nel diagramma a blocchi. Si deve tuttavia rilevare che queste operazioni sono parte integrante dell'operazione di looping quando questa viene rappresentata in questa maniera.

Quest'ultimo metodo di rappresentare un loop (fig. 7-7) è preferibile al metodo precedente (fig. 7-6), perché è più semplice e perché più da vicino assomiglia alle strutture di loop che sono incluse nei linguaggi di programmazione comunemente usati.

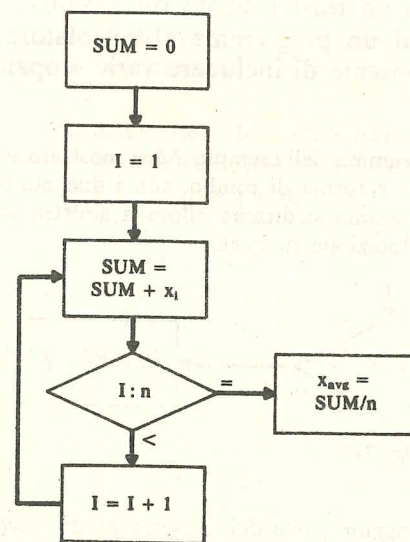


Fig. 7-6

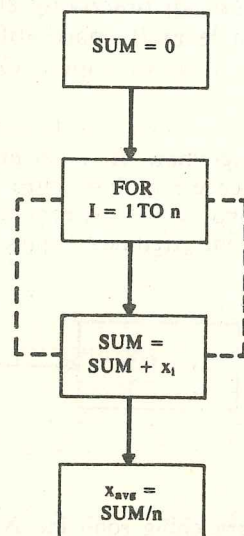


Fig. 7-7

Useremo quest'ultima rappresentazione per tutti i loop finiti (cioè quei loop che vengono ripetuti un numero prescritto di volte) dappertutto nel resto di questo capitolo.

Un'altra situazione che si presenta frequentemente è la necessità di continuare un'operazione di looping fino a che non sia soddisfatta una qualche particolare condizione (anziché il continuarla per un numero prescritto di passaggi). Ciò può essere realizzato utilizzando un'operazione di branching basata su qualche quantità *calcolata* (anziché su un contatore) come condizione di arresto dei calcoli.

Esempio 7.8. Supponiamo di voler determinare il numero minimo di interi consecutivi la cui somma eguaglia o supera un qualche valore specificato. Per fare questo, utilizzeremo un loop, come nell'esempio 7.7. In questo caso, tuttavia, la condizione di arresto assume la forma $1 + 2 + 3 + \dots + k \geq v$, dove v rappresenta il valore specificato. Il numero di interi desiderato è allora K , il più piccolo k per cui la condizione di arresto è soddisfatta.

La fig. 7-8 rappresenta un diagramma di flusso del procedimento. Si vede che SUM rappresenta ancora una somma cumulativa ed I un contatore, come nell'esempio 7.7. Tuttavia ora si sommano i valori consecutivi del contatore (gli interi consecutivi 1,2,3,...) alla SUM e si confronta ciascun valore consecutivo di SUM col valore specificato per v per stabilire una condizione di arresto dei calcoli. Il valore finale del contatore sarà il K desiderato.

Operazioni di input-output

Le operazioni di input e di output implicano la trasmissione di dati al calcolatore (tramite un lettore di schede, un terminale a telescrivente, un nastro magnetico, ecc.) od in uscita dal calcolatore (ad una stampante di linea, ad un terminale di time-sharing, ecc.). Vengono dette talvolta anche operazioni di *lettura* e di *scrittura*. Tutti i programmi per computer richiedono qualche tipo di operazioni di input-output.

Esempio 7.9. Nell'esempio 7.7 abbiamo preso in considerazione una parte di un programma per computer che effettua il calcolo della media di n differenti valori della variabile x utilizzando l'espressione

$$x_{\text{avg}} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Completare il procedimento aggiungendovi le necessarie istruzioni di input-output.

La fig. 7-9 rappresenta un diagramma di flusso dell'intero procedimento di calcolo della media. Si noti che l'operazione di input (READ) è inclusa all'interno del loop, poiché per ogni passo è richiesto

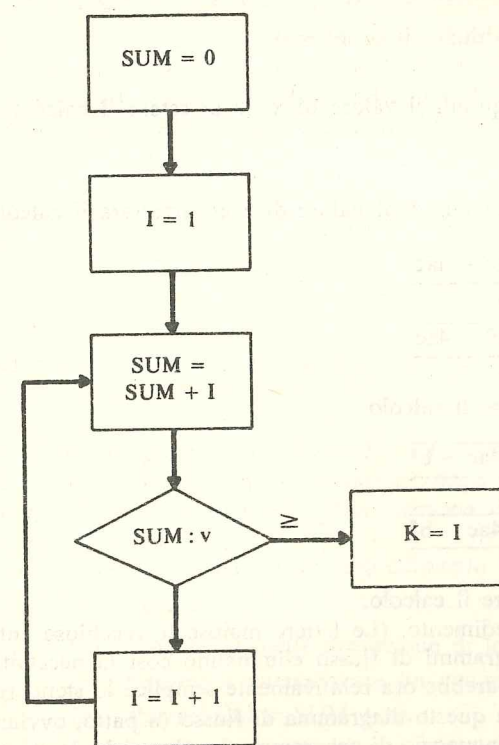


Fig. 7-8

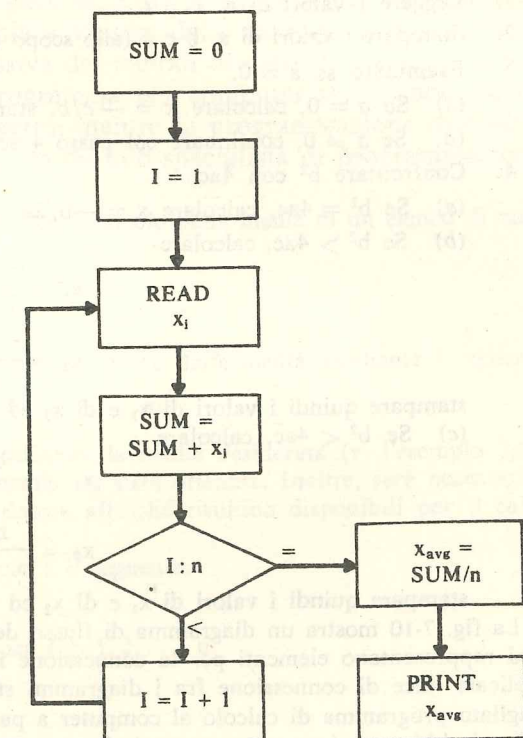


Fig. 7-9

un nuovo valore della x . Per contro, soltanto un unico valore (x_{avg}) deve venire stampato in uscita al termine del calcolo. Quindi l'operazione di output (PRINT) compare alla fine del procedimento, dopo che il loop è terminato.

7.4 ELABORAZIONE DI UN PROGRAMMA PER COMPUTER («FLOWCHARTING»)

Quando si deve elaborare un nuovo programma di calcolo al computer, il primo passo dovrebbe sempre essere lo sviluppo di uno schema del programma completo o diagramma di flusso (o «a blocchi»). Ciò consente al matematico di specificare con esattezza le caratteristiche che dovranno essere incluse nel programma ed il modo con cui il calcolo dovrà essere condotto, prima di essere coinvolto nelle considerazioni dettagliate della programmazione. In questo modo il matematico è in grado di elaborare il programma in maniera strategica, indipendentemente da qualsiasi particolare linguaggio di programmazione.

Esempio 7.10. Elaborare un programma per computer per il calcolo delle radici dell'equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dove a , b e c sono costanti note, tali che a e b non siano entrambe uguali a zero.

Il metodo usato per effettuare il calcolo dipenderà dai valori assegnati di a , b e c . Più specificatamente:

1. Se $a = 0$ (e $b \neq 0$), vi sarà una sola radice (reale), data da $x = -c/b$.
2. Se $a \neq 0$ e $b^2 = 4ac$, vi sarà una sola radice (reale, ripetuta), data da $x = -b/2a$.
3. Se $a \neq 0$ e $b^2 > 4ac$, vi saranno due radici reali, date da

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

4. Se $a \neq 0$ e $b^2 < 4ac$, vi saranno due radici complesse, date da

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

dove $i = \sqrt{-1}$.

Uno schema dettagliato del procedimento di calcolo è il seguente:

1. Leggere i valori di a , b e c
2. Stampare i valori di a , b e c (allo scopo di individuare il problema).
3. Esaminare se $a = 0$.
 - (a) Se $a = 0$, calcolare $x = -c/b$, stampare quindi il valore di x ed arrestare il calcolo.
 - (b) Se $a \neq 0$, continuare col passo 4 seguente
4. Confrontare b^2 con $4ac$.
 - (a) Se $b^2 = 4ac$, calcolare $x = -b/2a$, stampare quindi il valore di x ed arrestare il calcolo.
 - (b) Se $b^2 > 4ac$, calcolare

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

stampare quindi i valori di x_1 e di x_2 ed arrestare il calcolo.

- (c) Se $b^2 < 4ac$, calcolare

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

stampare quindi i valori di x_1 e di x_2 ed arrestare il calcolo.

La fig. 7-10 mostra un diagramma di flusso del procedimento. (Le lettere maiuscole racchiuse entro cerchi rappresentano elementi per la connessione fra diagrammi di flusso eliminando così la necessità di complicate linee di connessione fra i diagrammi stessi.) Sarebbe ora relativamente semplice lo stendere un dettagliato programma di calcolo al computer a partire da questo diagramma di flusso (a patto, ovviamente, che si abbia un'adeguata conoscenza di uno specifico linguaggio di programmazione), poiché la struttura complessiva del programma è ormai completamente progettata.

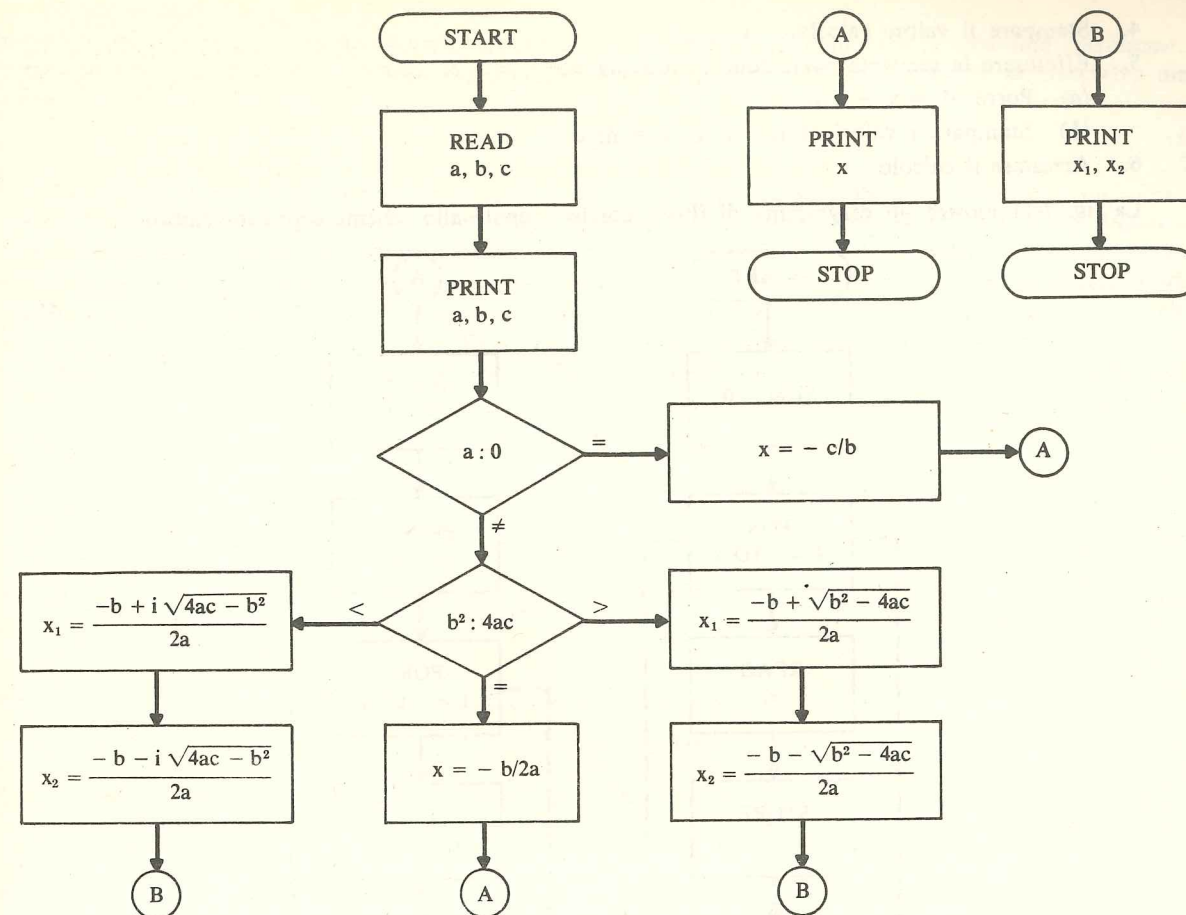


Fig. 7-10

È importante capire che non c'è bisogno di essere un abile programmatore per elaborare un programma. Quello che si richiede è una chiara visione delle caratteristiche desiderate per il programma ed una comprensione complessiva dei metodi di calcolo che sono necessari per realizzare quelle caratteristiche. Infatti, un programma per computer viene spesso elaborato dall'ingegnere o dal responsabile di un progetto, mentre la programmazione dettagliata nei linguaggi del computer viene di solito realizzata da uno specialista di programmazione.

Esempio 7.11. Elaborare un programma per computer per il calcolo della media di un elenco di numeri, cioè

$$x_{avg} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

e per calcolare successivamente la deviazione di ogni singolo numero dalla media, mediante l'espressione

$$d_i = x_i - x_{avg} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Questo programma richiederà due loop: uno per calcolare la media desiderata (v. l'esempio 7.7), e l'altro per calcolare le singole deviazioni, dopo che la media sia stata ottenuta. Inoltre, sarà necessario immagazzinare tutte le singole x nella memoria del calcolatore affinché risultino disponibili per il calcolo delle deviazioni d_i .

Uno schema dettagliato del procedimento di calcolo è il seguente:

1. Porre $SUM = 0$.
2. Effettuare la seguente operazione di looping per $I = 1, 2, \dots, n$.
 - (a) Leggere e memorizzare un valore per x_i .
 - (b) Porre $SUM = SUM + x_i$.
3. Calcolare la media desiderata come $x_{avg} = SUM/n$.

4. Stampare il valore calcolato di x_{avg} .
5. Effettuare la seguente operazione di looping per $I = 1, 2, \dots, n$.
 - (a) Porre $d_i = x_i - x_{avg}$.
 - (b) Stampare i valori attuali di I , x_i e di d_i .
6. Arrestare il calcolo

La fig. 7-11 mostra un diagramma di flusso corrispondente allo schema sopra indicato.

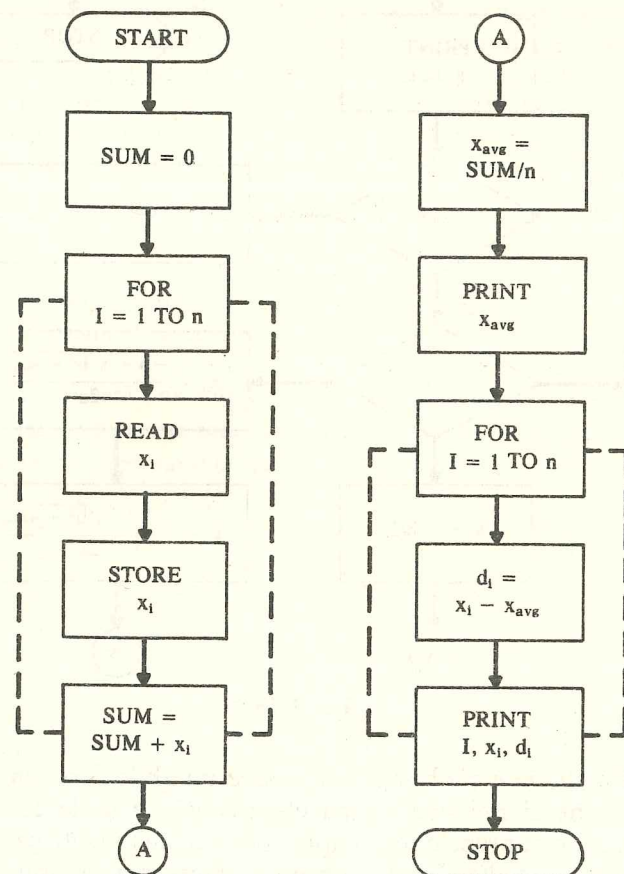


Fig. 7-11

Esempio 7.12. Preparare un programma per computer che simuli il moto di una palla di gomma che rimbalzi su e giù sotto l'azione della forza di gravità e contemporaneamente si sposti in direzione orizzontale con velocità costante. Verrà specificato lo spostamento verticale iniziale (cioè l'altezza originaria sul suolo, h), insieme alla velocità orizzontale (u) e al numero di volte che la palla rimbalza (n). Sarà pure noto il coefficiente di rimbalzo (c), che è il rapporto fra la velocità verticale subito dopo l'impatto col terreno e la velocità verticale subito prima dell'impatto, e l'accelerazione di gravità ($g = 9.80 \text{ m/s}^2$).

Per determinare la posizione della palla nei vari istanti, si farà uso delle seguenti ben note equazioni del moto:

$$\frac{dx}{dt} = u \quad \frac{dy}{dt} = v \quad \frac{dv}{dt} = -g$$

dove x è lo spostamento orizzontale (originariamente uguale a zero all'inizio del problema), y è l'altezza al di sopra del suolo (originariamente uguale ad h), v è la velocità verticale (originariamente nulla) e t rappresenta il tempo.

Una soluzione al computer richiede che le precedenti equazioni vengano riscritte con riferimento ad intervalli di tempo finiti, Δt . Con ciò,

$$x_{i+1} = x_i + u \Delta t \quad (1)$$

$$v_{i+1} = v_i - g \Delta t \quad (2)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} (v_{i+1} + v_i) \Delta t \quad (3)$$

dove gli indici i ed $i+1$ si riferiscono ai valori delle diverse variabili all'inizio e alla fine dell'incremento di tempo, rispettivamente. Inoltre, il tempo si può far passare da un incremento al successivo mediante l'espressione

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t \quad (4)$$

Le equazioni precedenti si possono usare per calcolare la posizione della palla entro ciascun incremento di tempo durante il quale non si verifichi nessun rimbalzo della palla. Se si verifica un rimbalzo, le precedenti equazioni devono venire alquanto modificate. Una condizione di rimbalzo si può individuare con un valore calcolato negativo di y_{i+1} , il che è fisicamente impossibile. Quando si verifica questa condizione, si possono ricalcolare v_{i+1} ed y_{i+1} come segue. Per prima cosa si calcoli il tempo necessario perché la palla colpisca il suolo, partendo dalla sua posizione all'inizio dell'incremento di tempo i -esimo. Se si indica questo tempo con Δt^* , allora, con una semplice proporzione,

$$\frac{\Delta t^*}{\Delta t} = \frac{y_i - 0}{y_i - y_{i+1}}$$

da cui

$$\Delta t^* = \frac{y_i}{y_i - y_{i+1}} \Delta t \quad (5)$$

Si può calcolare la velocità verticale immediatamente prima dell'impatto come

$$v = v_i - g \Delta t^*$$

per cui la velocità verticale immediatamente dopo l'impatto sarà

$$v^* = -c(v_i - g \Delta t^*) \quad (6)$$

La velocità verticale al termine dell'incremento di tempo sarà ora

$$v_{i+1} = v^* - g(\Delta t - \Delta t^*) \quad (7)$$

e lo spostamento verticale al termine dell'incremento di tempo si può scrivere come

$$y_{i+1} = \frac{1}{2} (v^* + v_{i+1})(\Delta t - \Delta t^*) \quad (8)$$

Si hanno a disposizione a questo punto informazioni sufficienti per impostare uno schema di un programma di calcolo completo al calcolatore. In dettaglio,

1. Leggere i valori di h , u , n , c , g e Δt .
2. Inizializzare tutti i parametri:

$$I = 0 \quad (I \text{ è il contatore degli incrementi})$$

$$J = 0 \quad (J \text{ è il contatore dei rimbalzi})$$

$$t_i = 0$$

$$x_i = 0$$

$$v_i = 0$$

$$y_i = h$$

3. Per ogni incremento di tempo successivo ($I = 1, 2, 3, \dots$) si procede come segue:

- (a) Incrementare il tempo e quindi calcolare lo spostamento orizzontale, la velocità verticale e lo spostamento verticale per ogni incremento di tempo successivo, usando le equazioni (1) ÷ (4). Continuare fino a che non si sia verificato il numero richiesto di rimbalzi, cioè fino a $J = n$.
- (b) Se la palla colpisce il suolo (come è indicato da un valore negativo di y_{i+1}), fare un test per vedere se questa è una condizione di rimbalzo oppure una conclusione del programma.
 - (i) *Condizione di rimbalzo* ($J < n$): Ricalcolare la velocità verticale e lo spostamento verticale usando le equazioni (5) ÷ (8). Incrementare quindi il contatore dei rimbalzi ($J = J + 1$) e passare al passo 3 (c) seguente.
 - (ii) *Condizione terminale* ($J = n$): Determinare l'istante dell'impatto usando l'equazione (5) ed il corrispondente spostamento orizzontale dalla (1). Stampare quindi i valori finali di t e di x ed arrestare il calcolo.
- (c) Stampare i valori calcolati di t_{i+1} , x_{i+1} , v_{i+1} ed y_{i+1} .

Un diagramma di flusso corrispondente è mostrato in fig. 7-12. Si noti che tutti i valori appena calcolati (t_{i+1} , x_{i+1} , v_{i+1} ed y_{i+1}) sono indicati con l'indice i anziché con $i + 1$. E ciò perché si è proceduto ad incrementare il contatore ($I = I + 1$) all'inizio di ogni incremento di tempo, per cui l'indice i si riferisce attualmente ai valori al termine dell'incremento di tempo considerato.

Da questo diagramma di flusso è relativamente semplice costruire un completo e dettagliato programma di calcolo al calcolatore in un qualche linguaggio di programmazione orientato in senso tecnico, come il FORTRAN o il BASIC. Esempi di programmi di questo tipo si vedranno nel par. 7.5.

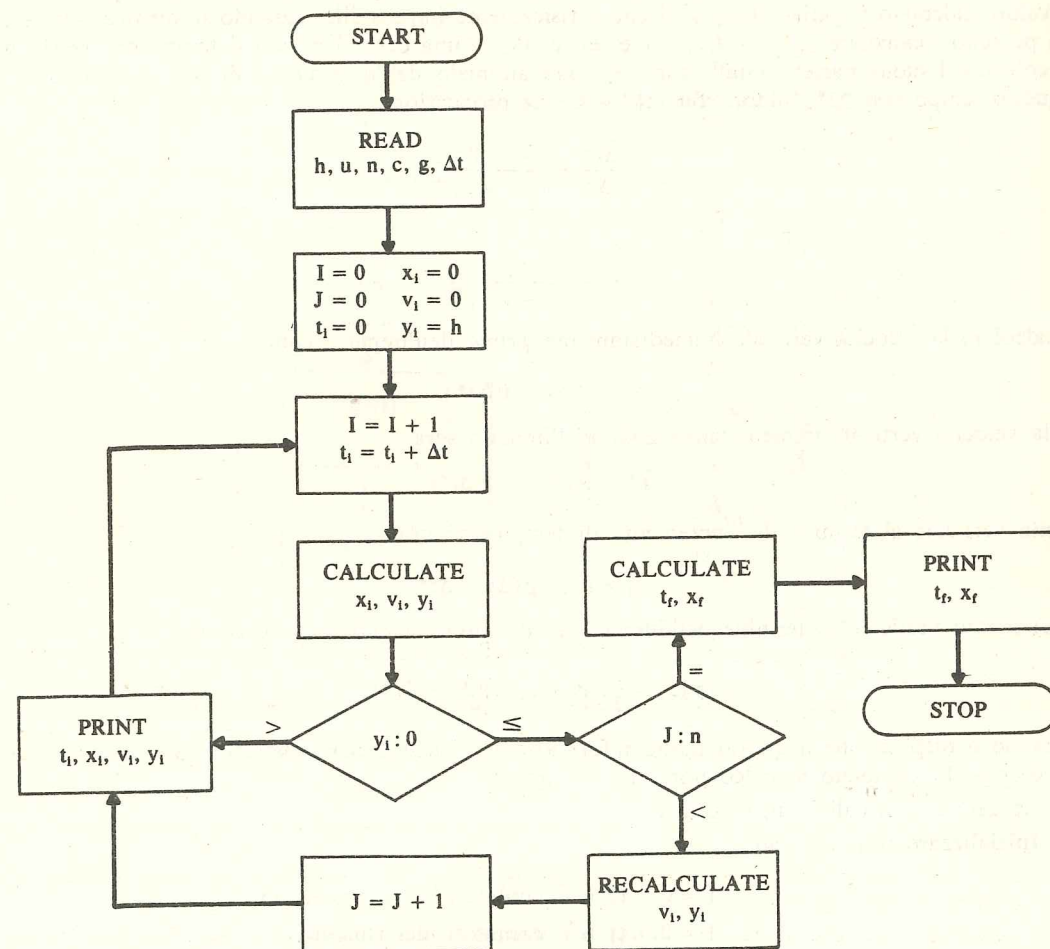


Fig. 7-12

7.5 LINGUAGGI DI PROGRAMMAZIONE

In questo libro verranno presi in considerazione soltanto linguaggi di uso generale ed orientati verso la tecnica. Non si parlerà perciò del COBOL, che è un linguaggio di interesse nel campo commerciale, anche se si tratta del linguaggio di programmazione di gran lunga più usato.

FORTRAN

Il FORTRAN può venire usato con tutti i grossi elaboratori e con la maggior parte dei calcolatori di medie dimensioni (minicomputer). Esso consiste in larga misura di un insieme di espressioni di tipo algebrico, integrate con un certo numero di parole chiave in inglese, come DO, IF, GO TO, READ e WRITE. Così un tipico programma (in) FORTRAN mostrerà una stretta rassomiglianza con la maniera in cui un ingegnere è portato naturalmente a schematiz-

zare la soluzione di un problema. Infatti molti ingegneri preferiscono scrivere l'enunciato di un problema in FORTRAN anziché in termini matematici più convenzionali.

Esempio 7.13. La fig. 7-13 mostra un programma FORTRAN per il calcolo della media di un elenco di numeri e per il calcolo delle deviazioni di ciascun singolo numero dalla media (v. l'esempio 7.11).

```

C FORTRAN PROGRAM TO COMPUTE THE AVERAGE OF A LIST OF NUMBERS AND
C THEN CALCULATE THE DEVIATION OF EACH NUMBER ABOUT THE AVERAGE
C
      DIMENSION X(100)
      100 FORMAT(I3)
      200 FORMAT(F10.5)
      300 FORMAT('1',10X,'THE AVERAGE VALUE IS XAVG=',F10.5//',12X','I',12X,
      1 'X(I)',14X,'D(I)')
      400 FORMAT(11X,I3,2(8X,F10.5))
      READ (5,100) N
C
C CALCULATE AVERAGE VALUE OF THE X'S
C
      SUM=0.
      DO 1 I=1,N
      READ (5,200) X(I)
      1 SUM=SUM+X(I)
      XAVG=SUM/N
      WRITE (6,300) XAVG
C
C CALCULATE DEVIATIONS ABOUT THE AVERAGE
C
      DO 2 I=1,N
      D=X(I)-XAVG
      2 WRITE (6,400) I,X(I),D
      STOP
      END
  
```

Fig. 7-13

Le righe precedute dalla lettera C sono *commenti*. Tutte le altre righe rappresentano *enunciati* (istruzioni) FORTRAN, che comportano l'esecuzione di specifiche azioni da parte del calcolatore. Ogni riga rappresenta un'istruzione separata (ad eccezione della riga compresa fra 300 FORMAT... e 400 FORMAT..., che è una continuazione della riga precedente).

Il primo enunciato (DIMENSION) riserva uno spazio per 100 parole nella memoria del calcolatore per le x ; in tal modo il programma può venire impiegato per effettuare una media su un numero massimo di 100 valori differenti delle x . (Si noti che il programma, se necessario, può calcolare la media su un numero di valori delle x inferiore a 100.)

I quattro enunciati successivi (FORMAT) specificano il modo con cui verranno indicati i dati di input e di output e forniscono delle rappresentazioni in inglese per i dati di output. (Un'interpretazione più precisa di queste istruzioni è di natura piuttosto tecnica e va perciò oltre lo scopo di questa breve discussione.) L'enunciato successivo (READ) fa sì che un valore di n venga letto dal calcolatore, essendo n il numero attuale dei valori della x che devono venire mediati. (Si noti che n non può superare 100.)

Il valore desiderato della media x_{avg} si determina attraverso i sei enunciati successivi (che vanno da SUM = 0 a WRITE). Il primo di questi enunciati inizializza la somma cumulativa al valore zero. I tre enunciati seguenti (DO, READ, e SUM = ...) costituiscono un loop che legge e memorizza tutte le x e calcola la loro somma. Dopo che il loop è stato eseguito n volte, si ottiene un valore della x_{avg} (XAVG = ...), che viene quindi stampato (WRITE).

L'ultimo blocco di enunciati consiste di un altro loop (DO, D = ..., e WRITE) che effettua il calcolo e stampa un valore per ciascuna delle deviazioni. (In pratica, ad ogni ripetizione del loop vengono stampati i valori attuali di i , x_i e d_i .) Dopo questo loop, si ha un'istruzione che provoca l'arresto nell'esecuzione del programma (STOP), seguita da un enunciato che rappresenta la fine materiale del programma (END).

Il lettore dovrebbe osservare la stretta corrispondenza esistente fra il programma FORTRAN mostrato in fig. 7-13 e il diagramma di flusso presentato in fig. 7-11.

Il FORTRAN è un linguaggio di programmazione facile da imparare e da usare. Esso viene molto usato dagli ingegneri professionisti e viene appreso dalla maggior parte degli studenti di ingegneria americani fin dal primo, o al più, dal secondo anno di corso. Oggi molti studenti americani imparano il FORTRAN quando frequentano ancora le scuole secondarie superiori.

BASIC

Il BASIC è stato concepito originariamente come un semplice linguaggio per time-sharing, che poteva venire facilmente usato da studenti delle scuole secondarie superiori e dell'università con un minimo di preparazione formale. Attualmente questo linguaggio è disponibile nella maggior parte dei centri di calcolo e praticamente in tutti i servizi di time-sharing commerciali. Inoltre il BASIC viene ora usato nella maggior parte dei mini- e microcomputer come linguaggio di programmazione primario ad alto livello.

Sotto molti aspetti, il BASIC è simile al FORTRAN, sebbene esso sia alquanto più facile da imparare e da usare. Il linguaggio BASIC ha una struttura di tipo algebrico, completata da alcune parole chiave inglesi, quali LET, IF, GO TO, INPUT E PRINT.

Esempio 7.14. La fig. 7-14 mostra un programma (in) BASIC che ha gli stessi obiettivi del programma FORTRAN mostrato in fig. 7-13, cioè il programma calcola la media di un dato elenco di numeri e calcola poi la deviazione di ciascun singolo numero rispetto alla media (v. l'esempio 7.11).

```

>10 REM BASIC PROGRAM TO COMPUTE THE AVERAGE OF A LIST OF NUMBERS AND
>20 REM THEN CALCULATE THE DEVIATION OF EACH NUMBER ABOUT THE AVERAGE
>25
>30 DIM X(100)
>40 INPUT N
>45
>50 LET S=0                "CALCULATE AVERAGE VALUE OF THE X'S
>60 FOR I=1 TO N
>70   INPUT X(I)
>80   LET S=S+X(I)
>90 NEXT I
>100 LET A=S/N
>110 PRINT "THE AVERAGE VALUE IS XAVG=";A
>115
>120 FOR I=1 TO N          "CALCULATE DEVIATIONS ABOUT THE AVERAGE
>130   LET D=X(I)-A
>140   PRINT "I=";I,"X(I)=";X(I),"D(I)=";D
>150 NEXT I
>160 END

```

Fig. 7-14

Si vede che ogni riga in un programma BASIC deve incominciare con un *numero di riga*. Ciascuna di queste righe, ad eccezione delle righe in bianco (« blank ») (righe 25, 45 e 115) rappresenta un *enunciato* (o istruzione) BASIC.

Le prime due righe sono osservazioni e non hanno altro scopo che quello di fornire un titolo per il programma. La riga 30 riserva uno spazio di 100 parole per l'immagazzinamento delle x nella memoria del calcolatore. La riga successiva (la 40) introduce nel calcolatore il valore attuale di n (cioè il numero attuale delle x che devono venire mediate). (Il valore di n non può superare 100.)

Le righe dalla 50 alla 90 forniscono le istruzioni per il calcolo della somma delle x . (Si noti che le righe dalla 60 alla 90 definiscono un loop che viene eseguito n volte, cioè per $I = 1, I = 2, \dots, I = N$). Il valore richiesto di x_{avg} viene determinato in corrispondenza della riga 100 e quindi stampato (insieme ad una opportuna scrittura di contrassegno) nella riga 110.

Un secondo loop è generato dalle righe comprese fra la 120 e la 150. Questo loop calcola e stampa un valore per ciascuna delle deviazioni. (Si noti che qui l'enunciato PRINT fa sì che vengano stampati i valori attuali di i , x_i e d_i , insieme ad opportuni contrassegni per individuarli facilmente.) Infine l'ultima riga segnala la fine del programma, facendo sì che il calcolo si arresti.

Si osservi la stretta corrispondenza fra il programma BASIC presentato in questo esempio ed il diagramma di flusso mostrato in fig. 7-11. Si noti anche la somiglianza fra questo programma ed il corrispondente programma FORTRAN mostrato in fig. 7-13.

Alla maggior parte degli studenti di ingegneria americani viene insegnato il FORTRAN anziché il BASIC all'università, sebbene molti studenti oggi imparino il BASIC già prima di arrivare all'università. Il linguaggio BASIC sta diventando sempre più popolare e potrà alla fine rivaleggiare col FORTRAN via via che le applicazioni del time-sharing e dei microcomputer diventeranno prevalenti.

Altri linguaggi tecnici di programmazione

L'ALGOL, un linguaggio simile al FORTRAN, viene oggi utilizzato in molti elaboratori di grosse dimensioni. Questo linguaggio è sotto alcuni aspetti superiore al FORTRAN, sebbene non abbia mai avuto il vasto interesse di mercato del FORTRAN. Oggi l'impiego dell'ALGOL sembra più diffuso in Europa che negli Stati Uniti.

Il PL/1 è un linguaggio di programmazione « della seconda generazione », che è stato sviluppato dall'IBM nel corso del 1960. Si tratta di un linguaggio veramente completo, che congloba alcune delle migliori caratteristiche del FORTRAN, dell'ALGOL e del COBOL. Nella comunità degli ingegneri, tuttavia, questo linguaggio non ha ricevuto quell'ampia accoglienza che era stata prevista, per cui il futuro del PL/1 è attualmente alquanto incerto. Nonostante ciò, il PL/1 è uno dei più potenti linguaggi di programmazione a disposizione per importanti applicazioni tecniche e scientifiche.

L'APL è un linguaggio di programmazione più avanzato che contiene caratteristiche che non si trovano nel FORTRAN, nel BASIC, ecc.. In passato questo linguaggio è stato usato soltanto da un numero relativamente piccolo di ingegneri, di scienziati e di matematici, pur con riferimento ad applicazioni di programmazione piuttosto specialistiche e complesse. Sembra tuttavia che vada sviluppandosi un più ampio interesse per l'APL via via che tale linguaggio diventa più accessibile.

PROBLEMI RISOLTI

- 7.1. Modificare il procedimento presentato nell'esempio 7.1 in modo che una *sequenza* di raggi possa venire elaborata in successione (cioè senza arrestare e fare ripartire il programma dopo ogni calcolo).

L'esecuzione di un programma sequenziale si può realizzare facilmente per mezzo di una struttura a loop. Un modo di effettuare l'operazione di looping è semplicemente quello di continuare a leggere i dati di input fino a che tutti i dati non siano stati letti. Il calcolatore si arresterà automaticamente una volta che avrà esaurito i dati. Questo procedimento, illustrato in fig. 7-15(a), è adatto specialmente per l'elaborazione in batch.

Un approccio più sofisticato è quello di assegnare un valore fittizio al raggio, come ad es. $r = 0$, il che indicherà una condizione di arresto. In tal modo, il programma continuerà « a girare » fino a che non verrà letto un valore $r = 0$, ed in quel momento l'esecuzione del programma cesserà. Questo metodo è particolarmente adatto per applicazioni di time-sharing, quantunque esso possa venire usato anche in batch. La fig. 7-15(b) illustra questo procedimento.

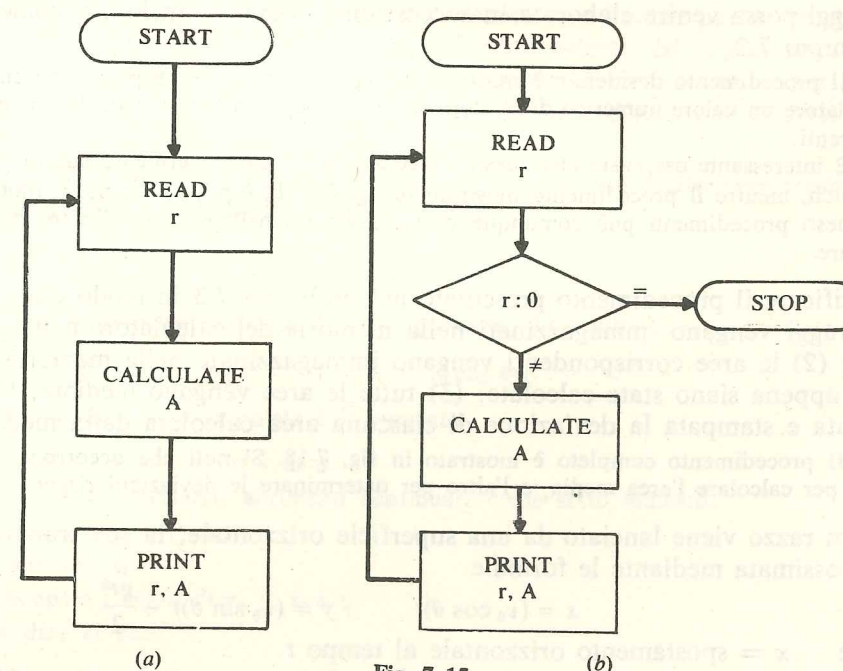


Fig. 7-15

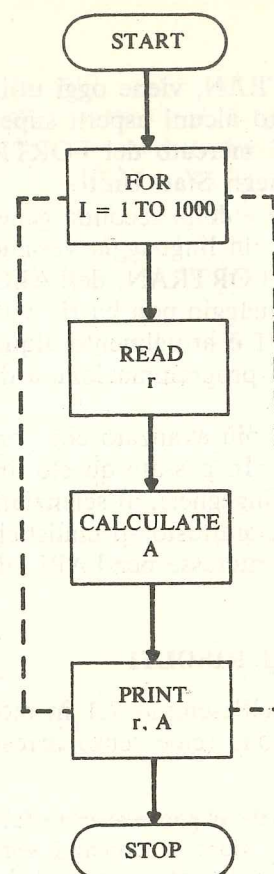


Fig. 7-16

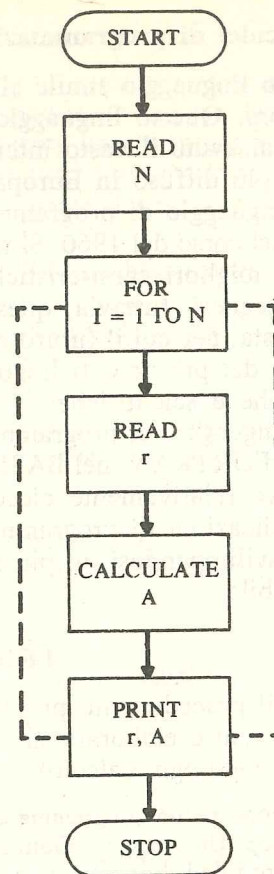


Fig. 7-17

- 7.2. Modificare il procedimento presentato nel problema 7.1 in modo che una sequenza di 1000 raggi possa venire elaborata in successione, operando in batch, come descritto nell'esempio 7.2.

La fig. 7-16 indica il tipo di struttura a loop adatta per questo problema.

- 7.3. Modificare il procedimento presentato nel problema 7.2 in modo che una sequenza di N raggi possa venire elaborata in successione, operando in batch, come descritto nell'esempio 7.2.

Il procedimento desiderato è mostrato in fig. 7-17. Si noti che per prima cosa viene letto dal calcolatore un valore numerico di N , dopo di che il loop consente di calcolare le aree per gli N raggi differenti.

È interessante osservare che questo procedimento è particolarmente adatto per le operazioni in batch, mentre il procedimento mostrato in fig. 7-15(b) è più adatto per il time-sharing. Ciascuno di questi procedimenti può comunque venire usato sia nell'uno sia nell'altro dei due modi di operare.

- 7.4. Modificare il procedimento presentato nel problema 7.3 in modo che (1) tutti i valori dei raggi vengano immagazzinati nella memoria del calcolatore non appena siano stati letti; (2) le aree corrispondenti vengano immagazzinate nella memoria del calcolatore non appena siano state calcolate; (3) tutte le aree vengano mediate; (4) venga determinata e stampata la deviazione di ciascuna area calcolata dalla media.

Il procedimento completo è mostrato in fig. 7-18. Si noti che occorrono ora *due* loop. un loop per calcolare l'area media, e l'altro per determinare le deviazioni rispetto alla media.

- 7.5. Se un razzo viene lanciato da una superficie orizzontale, la sua traiettoria può venire approssimata mediante le formule

$$x = (v_0 \cos \theta)t \quad y = (v_0 \sin \theta)t - \frac{gt^2}{2}$$

dove x = spostamento orizzontale al tempo t
 y = spostamento verticale al tempo t

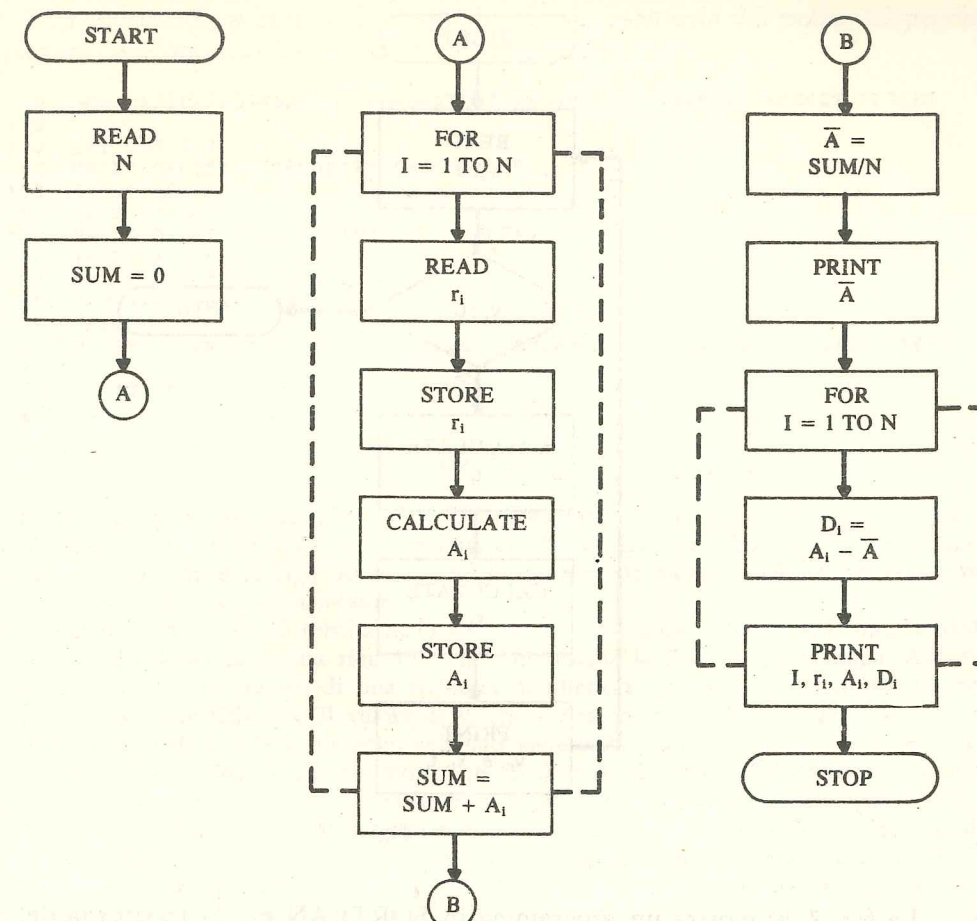


Fig. 7-18

v_0 = velocità iniziale del raggio

θ = inclinazione del lancio rispetto all'orizzontale

g = accelerazione di gravità

Preparare un programma per computer che accetti v_0 e θ come parametri di input e che calcoli quindi t_f (tempo necessario perché il razzo atterri) ed x_f (distanza percorsa). Includere una predisposizione per effettuare diversi calcoli successivi per valori differenti di v_0 e di θ . La condizione $v_0 = 0$ rappresenti una condizione di arresto dei calcoli.

Il tempo necessario affinché il razzo ritorni a terra si può determinare ponendo $y = 0$ e risolvendo rispetto a $t > 0$. Così facendo, si ottiene

$$t_f = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$$

Si può allora determinare subito la distanza percorsa, che risulta

$$x_f = (v_0 \cos \theta) t_f$$

Il procedimento di calcolo completo è il seguente:

1. Leggere i valori di v_0 e di θ .
2. Se $v_0 = 0$, arrestarsi; altrimenti continuare come sotto indicato.
3. Calcolare t_f .
4. Calcolare x_f .
5. Stampare i valori di v_0 , θ , x_f e t_f .
6. Andare al passo 1.

La fig. 7-19 mostra un diagramma di flusso per questo procedimento di calcolo.

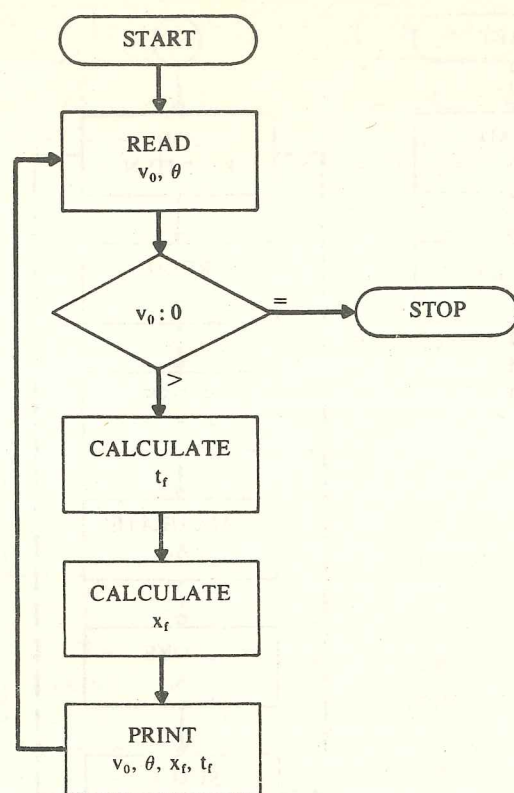


Fig. 7-19

- 7.6. La fig. 7.20 mostra un programma in FORTRAN per la traiettoria del razzo del problema 7.5. Spiegare il significato e lo scopo di ogni riga del programma.

```

C FORTRAN PROGRAM TO CALCULATE TIME AND DISTANCE OF ROCKET FLIGHT
C
100 FORMAT(2F7.2)
200 FORMAT('0',10X,'INITIAL VELOCITY=',F7.2,' METERS/SEC',10X,
1 'ANGLE OF INCLINATION=',F7.2,' RADIANS',10X,'TIME OF FLIGHT=
2 F7.2,' SECONDS',10X,'DISTANCE TRAVELED=',F7.2,' METERS')
GRAV=9.807
1 READ (5,100) V0,THETA
IF (V0.EQ.0.) STOP
TF=2.*V0*SIN(THETA)/GRAV
XF=V0*COS(THETA)*TF
WRITE (6,200) V0,THETA,TF,XF
GO TO 1
END
  
```

Fig. 7-20

Le prime due righe (che iniziano ciascuna con una C) sono commenti. Le quattro righe successive sono istruzioni di FORMAT, che specificano il modo in cui compaiono i dati di input e di output e forniscono sistemi di identificazione in inglese per i dati di output. Viene poi assegnato un valore per l'accelerazione di gravità ($GRAV = 9.807$) e si introducono i dati di input nel calcolatore (READ).

Si effettua quindi un test (IF...) per vedere se è stato specificato un valore zero per v_0 . In questo caso, il calcolo ha termine. Altrimenti, il calcolo procede con la valutazione di t_f ($TF = \dots$) e di x_f ($XF = \dots$).

Infine, si stampano i valori calcolati insieme ai dati di input (allo scopo di identificare ciascun problema). Il calcolo viene quindi ripetuto a partire dall'enunciato 1 (READ), col che si deve leggere un nuovo gruppo di dati di input, ecc. L'ultimo enunciato (END) identifica la fine materiale del programma.

- 7.7. La fig. 7-21 mostra un programma in BASIC per la traiettoria del razzo del problema 7.5. Spiegare lo scopo di ciascuna riga del programma.

```

>10 REM BASIC PROGRAM TO CALCULATE TIME AND DISTANCE OF ROCKET FLIGHT
>20
>30 LET G=9.807
>40 PRINT "INITIAL VELOCITY (M/SEC) =";
>50 INPUT V0
>60 IF V0=0 GO TO 150
>70 PRINT "ANGLE OF INCLINATION (RADIAN) =";
>80 INPUT A
>90 LET T=2*V0*SIN(A)/G
>100 LET X=V0*COS(A)*T
>110 PRINT
>120 PRINT "TIME OF FLIGHT=";T;"SECONDS","DISTANCE TRAVELED=";X;"METERS"
>130
>140 GO TO 40
>150 END
  
```

Fig. 7-21

La prima riga è un'osservazione (il titolo del programma) ed è seguita da una riga bianca. La riga 30 assegna un valore a g , l'accelerazione di gravità. La riga 40 stampa un messaggio che richiede un'informazione e la riga 50 fa sì che l'informazione richiesta (il valore di v_0) venga introdotta mediante lettura nel calcolatore.

Una condizione di arresto è fornita nella riga 60. Se un valore nullo di v_0 è stato introdotto nel calcolatore, il calcolo salta alla riga 150, che rappresenta la fine del programma. Altrimenti, il calcolo continua con la stampa di una richiesta di ulteriori informazioni (riga 70). La riga 80 introduce l'informazione richiesta (il valore di θ , che è ora chiamato A) nel calcolatore.

I valori richiesti di t_f e di x_f vengono calcolati nelle righe 90 e 100, rispettivamente. La riga 120 è l'istruzione di stampa di questi valori, con gli opportuni sistemi di identificazione. Il risultato stampato è preceduto e seguito da righe bianche di output (generate dalle righe 110 e 130), che hanno lo scopo di evidenziare, distanziandoli, i dati di output. Il calcolo ritorna quindi alla riga 40, dove un nuovo gruppo di dati di input viene immesso nel calcolatore, e così via. Infine, la riga 150 fornisce un'istruzione di arresto dei calcoli ed indica la fine del programma.

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

Risposte alla maggior parte dei problemi sono fornite alla fine del libro

- 7.8. Elaborare un programma di calcolo al computer per il calcolo dell'area di un rettangolo di cui sono date la lunghezza e la larghezza. Includere un procedimento che preveda l'esecuzione ripetitiva del programma in batch, in modo che si possano elaborare N gruppi di dati in successione (dove N è un parametro di input).
- 7.9. Elaborare un programma per computer per il calcolo del volume di una sfera di raggio dato. Includere un procedimento automatico per l'esecuzione ripetitiva del programma in time-sharing (cioè permettere che il programma continui « a girare » fino a che non intervenga un valore nullo del raggio).
- 7.10. Elaborare un programma per computer per risolvere ciascuno dei problemi di seguito descritti. Per ciascun problema, includere un procedimento per l'esecuzione ripetitiva del programma in batch, in modo che possano venire elaborati N gruppi di dati in successione (essendo N un parametro di input).
- (a) Convertire una lettura di temperatura in gradi Fahrenheit a gradi Celsius, mediante la formula

$$\theta_C = \frac{5}{9} (\theta_F - 32)$$

- (b) Un salvadanaio contiene n_1 mezzi dollari, n_2 quarti di dollari, n_3 monete da dieci centesimi, n_4 monete da cinque centesimi ed n_5 monete da un centesimo di dollaro. Calcolare quanto denaro è contenuto nel salvadanaio, in termini di dollari.

- (c) Se a , b e c rappresentano i tre lati di un triangolo, l'area del triangolo è data dalla

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

dove $s = (a + b + c)/2$. Inoltre il raggio del *massimo cerchio inscritto* è dato da

$$r_i = \frac{A}{s}$$

ed il raggio del *più piccolo cerchio circoscritto* è

$$r_c = \frac{abc}{4A}$$

Calcolare l'area del triangolo, l'area del massimo cerchio inscritto e l'area del più piccolo cerchio circoscritto, per un particolare gruppo di dati. (Si noti che un gruppo di valori a , b e c rappresenterà un triangolo soltanto se il valore massimo è minore della somma dei due valori rimanenti. Inserire nel programma un test per verificare questa condizione.)

- 7.11. Elaborare un programma di calcolo al calcolatore per risolvere ciascuno dei problemi sotto descritti. Per ciascun problema, inserire un procedimento che consenta l'esecuzione ripetitiva del programma operando in time-sharing.

- (a) Convertire una lettura di temperatura da gradi Fahrenheit a gradi Celsius, mediante la formula

$$\theta_c = \frac{5}{9}(\theta_f - 32)$$

- (b) La pressione, il volume e la temperatura di una massa d'aria sono legati dalla formula

$$pV = 2.83m(T + 273)$$

dove p = pressione, atm
 V = volume, litri
 m = massa dell'aria, kg
 T = temperatura, °C

Determinare la quantità d'aria presente in un recipiente, se sono specificati la pressione, il volume e la temperatura.

- (c) Calcolare il valore futuro di una data somma di denaro, usando la formula

$$F = P(1 + i)^n$$

dove F = valore futuro
 P = somma data
 i = tasso d'interesse annuale (espresso in forma decimale)
 n = numero di anni

- 7.12. I numeri di Fibonacci rappresentano un'interessante sequenza in cui ciascun numero è uguale alla somma dei due numeri precedenti. In altre parole,

$$F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$$

dove F_i è il numero di Fibonacci i -esimo. I primi due numeri di Fibonacci sono definiti uguali ad 1, cioè

$$F_1 = F_2 = 1$$

Scrivere un programma di calcolo per generare e stampare i primi N numeri di Fibonacci, essendo N un parametro di input.

- 7.13. Scrivere un programma per il calcolo della somma dei primi N numeri interi dispari. Introdurre il valore di N come parametro di input.

- 7.14. Scrivere un programma per calcolare la somma dei primi N multipli, di un intero K . Introdurre i valori di N e di K come parametri di input.

- 7.15. Scrivere un programma per il calcolo di $K!$, dove K è un numero intero positivo. (Ricordare che $K!$ è definito come $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times K$.) Introdurre il valore di K come parametro di input.

- 7.16. Scrivere un programma per il calcolo di $\sin x$ attraverso la somma dei primi N termini della serie

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (x \text{ in radianti})$$

Introdurre i valori di x e di N come parametri di input.

- 7.17. Scrivere un programma per il calcolo di $\sin x$ utilizzando la serie presentata nel problema 7.16. Tuttavia, anziché sommare uno specificato numero di termini, continuare ad aggiungere termini successivi nella serie fino a che il valore di un termine non diventi minore (in valore assoluto) di 10^{-5} .

- 7.18. Scrivere un programma per computer in grado di leggere un elenco di numeri e quindi di riordinarli dal più piccolo al più grande. Inserire un procedimento per stampare sia l'elenco originale sia l'elenco riordinato. Elaborare il programma in modo tale che soltanto un elenco di numeri sia immagazzinato nella memoria del calcolatore.

- 7.19. Scrivere un programma per il calcolo della media pesata di un elenco di numeri. Ricordare di introdurre per lettura sia i numeri sia i loro corrispondenti pesi. (v. il par. 4.3.)

- 7.20. Scrivere un programma per il calcolo del valor medio e della deviazione standard di un elenco di numeri. (v. il par. 4.4.)

- 7.21. Scrivere un programma per tracciare una retta attraverso un gruppo di M punti-dato utilizzando il metodo dei minimi quadrati. (v. il par. 4.9.) Supporre di avere a disposizione un sottoprogramma per risolvere il sistema di equazioni lineari simultanee (rappresentare la soluzione come un singolo passo nel procedimento di calcolo complessivo).

- 7.22. Scrivere un programma per interpolare una funzione di potenze in una serie di M punti-dato usando il metodo dei minimi quadrati. (v. il par. 4.9.)

- 7.23. Scrivere un programma per il calcolo del coefficiente di correlazione di un gruppo di M punti-dato. (v. il par. 4.10.)

- 7.24. Scrivere un programma per determinare la QPA di fine semestre di uno studente universitario. (v. il problema 4.9.)

- 7.25. Elaborare programmi per computer in grado di ricavare una soluzione di un'equazione algebrica non lineare mediante (a) il metodo delle successive sostituzioni, (b) il metodo di Newton-Raphson, (c) il metodo della bisezione. (v. il par. 5.2.) In ciascun caso, introdurre nel calcolatore valori opportuni del valore di tentativo iniziale (x_0) e del criterio di arresto (ϵ). In (a) e (b) tener conto della possibile divergenza del metodo.

- 7.26. Elaborare programmi per ottenere la soluzione di un sistema di equazioni lineari simultanee usando (a) il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan, (b) il metodo di eliminazione di Gauss. (v. il par. 5.3.) Suggestimento: Ciascun programma richiederà un gruppo di tre loop inseriti l'uno nell'altro.

- 7.27. Scrivere un programma di calcolo al computer per determinare l'area sottesa alla curva definita dai punti-dato $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ utilizzando la regola dei trapezi. (v. il par. 5.5.)

- 7.28. Scrivere un programma per la valutazione dell'integrale

$$I = \int_a^b y dx$$

mediante: (a) la regola dei trapezi, (b) la regola di Simpson, per una funzione integranda nota $y = f(x)$. (v. il par. 5.5.) Assumere in ciascun caso un numero pari di sottointervalli uguali. Introdurre l'ampiezza dei sottointervalli (Δx) come parametri di input.

- 7.29. Scrivere un programma per costruire una tabella che fornisca il fattore d'interesse composto di annualità uguali (F/A) in funzione del tasso d'interesse (i) e del numero di anni (n). Sia $n = 1, 2, 3, \dots, 30$ ed $i = 0.04, 0.05, 0.06, \dots, 0.12$. (v. il par. 6.2.)
- 7.30. La fig. 7.22 contiene un programma in FORTRAN per ottenere le radici di un'equazione di secondo grado, come si è descritto nell'esempio 7.10. Descrivere, come meglio possibile, lo scopo di ciascuna riga del programma.

```
C FORTRAN PROGRAM TO COMPUTE THE ROOTS OF A QUADRATIC EQUATION
C
100 FORMAT(I3)
200 FORMAT(3F10.4)
300 FORMAT('0',10X,'A=',F10.4,10X,'B=',F10.4,10X,'C=',F10.4)
400 FORMAT('0',10X,'REAL ROOTS:',10X,'X1=',F10.4,10X,'X2=',F10.4//)
500 FORMAT('0',10X,'REPEATED SINGLE ROOT:',10X,'X=',F10.4//)
600 FORMAT('0',10X,'COMPLEX ROOTS:',10X,'X1=',F10.4,' + ',F10.4,' I',
1 10X,'X2=',F10.4,' - ',F10.4,' I',//)
700 FORMAT('0',10X,'LINEAR CASE - SINGLE ROOT:',10X,'X=',F10.4//)
      READ (5,100) N
      DO 5 I=1,N
      READ (5,200) A,B,C
      WRITE (6,300) A,B,C
      IF (A.EQ.0.) GO TO 4
      DISC=B**2-4.*A*C
      IF (DISC) 3,2,1
C
C REAL ROOTS (DISC>0)
C
1 X1=(-B+SQRT(DISC))/(2.*A)
X2=(-B-SQRT(DISC))/(2.*A)
WRITE (6,400) X1,X2
GO TO 5
C
C REPEATED ROOT (DISC=0)
C
2 X=-B/(2.*A)
WRITE (6,500) X
GO TO 5
C
C COMPLEX ROOTS (DISC<0)
C
3 XREAL=-B/(2.*A)
XIMAG=SQRT(-DISC)/(2.*A)
WRITE (6,600) XREAL,XIMAG,XREAL,XIMAG
GO TO 5
C
C LINEAR CASE - SINGLE ROOT (A=0)
4 X=-C/B
WRITE (6,700) X
5 CONTINUE
STOP
END
```

Fig. 7-22

- 7.31. La fig. 7-23 contiene un programma in BASIC per ricavare le radici di un'equazione di secondo grado, come si è descritto nell'esempio 7.10. Descrivere, come meglio possibile, l'obiettivo di ciascuna riga del programma.

```
>10 REM BASIC PROGRAM TO COMPUTE THE ROOTS OF A QUADRATIC EQUATION
>20
>30 PRINT "VALUES FOR A, B AND C";
>40 INPUT A,B,C
>50 IF (A+B+C)=0 THEN 500
>60 IF A=0 THEN 430
>70 LET D=B^2-4*A*C
>80 IF D<0 THEN 330
>90 IF D=0 THEN 230
>100
>110 REM REAL ROOTS (D>0)
>120
>130 LET X1=(-B+SQRT(D))/(2*A)
>140 LET X2=(-B-SQRT(D))/(2*A)
>150 PRINT "REAL ROOTS:",X1,X2
>160 GO TO 30
>200
>210 REM REPEATED ROOT (D=0)
>220
>230 LET X=-B/(2*A)
>240 PRINT "REPEATED SINGLE ROOT:",X
>250 GO TO 30
>300
>310 REM COMPLEX ROOTS (D<0)
>320
>330 LET R=-B/(2*A)
>340 LET I=SQRT(-D)/(2*A)
>350 PRINT "COMPLEX ROOTS:",X1="R;" + "I,"X2="R;" - "I;"
>360 GO TO 30
>400
>410 REM LINEAR CASE - SINGLE ROOT (A=0)
>420
>430 LET X=-C/B
>440 PRINT "LINEAR CASE - SINGLE ROOT:",X
>450 GO TO 30
>500 END
```

Fig. 7-23

APPENDICE A

Equivalenze di unità

Dimensioni

Equivalenze di unità

Area

1 acre = 43 560 ft² = 4.046 856 × 10⁻³ km² = 1.5625 × 10⁻³ mi²

Densità

1 g/cm³ = 1000 kg/m³ = 62.428 lb_m/ft³

1 kg/m³ = 10⁻³ g/cm³ = 0.062 428 lb_m/ft³

1 lb_m/ft³ = 0.016 018 5 g/cm³ = 16.0185 kg/m³

Energia

1 Btu = 777.649 ft · lb_f = 1054.35 J = 0.251 996 kcal

1 ft · lb_f = 1.285 93 × 10⁻³ Btu = 1.355 82 J

1 hp · hr = 2546.14 Btu = 1.98 × 10⁶ ft · lb_f = 2.68452 × 10⁶ J

1 J = 0.737 562 ft · lb_f = 2.390 06 × 10⁻⁴ kcal = 0.277 778 × 10⁻⁶ kW · hr

1 kcal = 3.968 32 Btu = 3085.96 ft · lb_f = 4184 J

1 kW · hr = 3409.52 Btu = 2.655 22 × 10⁶ ft · lb_f = 3.6 × 10⁶ J

Forza

1 dyne = 10⁻⁵ N = 7.233 × 10⁻⁵ poundal

1 lb_f = 4.448 22 N = 32.174 poundals

1 N = 0.224 809 lb_f = 7.233 poundals

1 poundal = 0.031 081 lb_f = 0.138 255 N

Capacità termica

1 Btu/lb_m · °F = 777.649 ft · lb_f/lb_m · °R = 1 kcal/kg · °C

1 ft · lb_f/lb_m · °R = 1.285 93 × 10⁻³ Btu/lb_m · °F = 1.285 93 × 10⁻³ kcal/kg · °C

1 J/kg · K = 2.390 06 × 10⁻⁴ Btu/lb_m · °F = 2.390 06 × 10⁻⁴ kcal/kg · °C

1 kcal/kg · °C = 1 Btu/lb_m · °F = 4184 J/kg · K

Lunghezza

1 angstrom (Å) = 10⁻¹⁰ m

1 m = 3.280 84 ft = 39.37 in

1 cm = 0.01 m

1 micron (μ) = 10⁻⁶ m

1 ft = 12 in = 0.3048 m

1 mi = 5280 ft = 1.609 344 km = 1760 yd

1 in = 2.54 cm = 0.083 333 3 ft

1 mm = 10⁻³ m

1 km = 1000 m = 0.621 371 mi

1 yd = 3 ft = 36 in

Massa

1 g = 10⁻³ kg

1 slug = 14.5939 kg = 32.174 lb_m

1 kg = 1000 g = 2.204 62 lb_m

1 ton = 907.185 kg = 2000 lb_m

1 lb_m = 0.453 592 kg

Potenza

1 Btu/hr = 3.927 52 × 10⁻⁴ hp = 0.292 875 W

1 hp = 550 ft · lb_f/sec = 745.7 W

1 kcal/s = 5.610 84 hp = 4184 W

1 kW = 1.341 02 hp = 1000 W

1 MW = 10⁶ W

1 W = 0.737 562 ft · lb_f/sec = 1.341 02 × 10⁻³ hp

Pressione

1 atm = 29.9213 inHg = 2116.224 lb_f/ft² = 760 mmHg = 1.013 26 × 10⁵ Pa = 14.696 psi

1 lb_f/ft² = 47.88 Pa = 6.944 44 × 10⁻³ psi

1 mmHg = 2.7845 lb_f/ft²

1 N/cm² = 10⁴ Pa

1 pascal (Pa) = 1 N/m² = 2.088 56 × 10⁻² lb_f/ft²

1 psi (lb_f/in²) = 6894.8 Pa = 144 lb_f/ft²

Temperatura

1 °C = 1 K = 1.8 °F = 1.8 °R

1 °F = 1 °R = 0.555 556 °C = 0.555 556 K

Formule di conversione per la temperatura

$\theta_C = \theta_K - 273.15$

$\theta_F = 1.8 \theta_C + 32 = \theta_R - 459.67$

$\theta_R = 1.8 \theta_K$

Conducibilità termica

1 Btu/hr · ft · °F = 4.1364 × 10⁻⁴ kcal/s · m · °C = 1.7307 W/m · K

1 kcal/s · m · °C = 2417.56 Btu/hr · ft · °F = 4184 W/m · K

1 W/m · K = 2.390 06 × 10⁻⁴ kcal/s · m · °C

Tempo

1 day (d) = 24 h = 8.64 × 10⁴ s

1 h = 60 min = 3600 s

1 min = 60 s

1 ms = 10⁻³ s

1 μs = 10⁻⁶ s

1 ns = 10⁻⁹ s

1 ps = 10⁻¹² s

Viscosità

1 Pa · s = 1 kg/m · s = 2419.1 lb_m/ft · hr = 10 poises

1 poise = 1 g/cm · s = 241.91 lb_m/ft · hr = 0.067 197 lb_m/ft · sec = 0.1 Pa · s

1 centipoise = 2.4191 lb_m/ft · hr = 0.001 Pa · s = 0.01 poise

1 kg/m · s = 10 g/cm · s = 2419.1 lb_m/ft · hr = 0.671 97 lb_m/ft · sec = 1 Pa · s

1 lb_m/ft · hr = 0.413 377 centipoise = 4.133 77 × 10⁻⁴ kg/m · s

= 2.7778 × 10⁻⁴ lb_m/ft · sec = 4.133 77 × 10⁻⁴ Pa · s = 4.133 77 × 10⁻³ poise

1 lb_m/ft · sec = 1488.16 centipoise = 3600 lb_m/ft · hr = 1.488 16 Pa · s = 14.8816 poise

Viscosità (cinematica)

1 centistokes = 10⁻⁶ m²/s = 0.01 stokes

1 ft²/hr = 2.7778 × 10⁻⁴ ft²/sec = 0.258 064 stokes

1 ft²/sec = 3600 ft²/hr = 929.03 stokes

1 m²/s = 3.875 × 10⁴ ft²/hr = 10.7639 ft²/sec = 10⁴ stokes

1 stokes = 1 cm²/s = 10⁻⁴ m²/s

Volume

1 gallon (gal) = 0.133 681 ft³ = 3.785 31 L = 4 qt

1 liter (L) = 1000.028 cm³ = 1.05672 qt

1 pint (pt) = 0.125 gal = 0.473 163 L = 0.5 qt

1 quart (qt) = 0.25 gal = 0.946 326 L = 2 pt

Fattore di interesse composto di pagamenti singoli

$F/P = (1 + i)^n$

	i = 4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	12%	15%	20%
n = 1	1.0400	1.0500	1.0600	1.0700	1.0800	1.0900	1.1000	1.1200	1.1500	1.2000
2	1.0816	1.1025	1.1236	1.1449	1.1664	1.1881	1.2100	1.2544	1.3225	1.4400
3	1.1249	1.1576	1.1910	1.2250	1.2597	1.2950	1.3310	1.4049	1.5209	1.7280
4	1.1699	1.2155	1.2625	1.3108	1.3605	1.4116	1.4641	1.5735	1.7490	2.0736
5	1.2167	1.2763	1.3382	1.4026	1.4693	1.5386	1.6105	1.7623	2.0114	2.4883
6	1.2653	1.3401	1.4185	1.5007	1.5869	1.6771	1.7716	1.9738	2.3131	2.9860
7	1.3159	1.4071	1.5036	1.6058	1.7138	1.8280	1.9487	2.2107	2.6600	3.5832
8	1.3686	1.4775	1.5938	1.7182	1.8509	1.9926	2.1436	2.4760	3.0590	4.2998
9	1.4233	1.5513	1.6895	1.8385	1.9990	2.1719	2.3579	2.7731	3.5179	5.1598
10	1.4802	1.6289	1.7908	1.9672	2.1589	2.3674	2.5937	3.1058	4.0456	6.1917
11	1.5395	1.7103	1.8983	2.1049	2.3316	2.5804	2.8531	3.4785	4.6524	7.4301
12	1.6010	1.7959	2.0122	2.2522	2.5182	2.8127	3.1384	3.8960	5.3503	8.9161
13	1.6651	1.8856	2.1329	2.4098	2.7196	3.0658	3.4523	4.3635	6.1528	10.6993
14	1.7317	1.9799	2.2609	2.5785	2.9372	3.3417	3.7975	4.8871	7.0757	12.8392
15	1.8009	2.0789	2.3966	2.7590	3.1722	3.6425	4.1772	5.4736	8.1371	15.4070
16	1.8730	2.1829	2.5404	2.9522	3.4259	3.9703	4.5950	6.1304	9.3576	18.4884
17	1.9479	2.2920	2.6928	3.1588	3.7000	4.3276	5.0545	6.8660	10.7613	22.1861
18	2.0258	2.4066	2.8543	3.3799	3.9960	4.7171	5.5599	7.6900	12.3755	26.6233
19	2.1068	2.5269	3.0256	3.6165	4.3157	5.1417	6.1159	8.6128	14.2318	31.9480
20	2.1911	2.6533	3.2071	3.8897	4.6610	5.6044	6.7275	9.6463	16.3665	38.3376
21	2.2788	2.7860	3.3996	4.1406	5.0338	6.1088	7.4002	10.8038	18.8215	46.0051
22	2.3699	2.9253	3.6035	4.4304	5.4365	6.6586	8.1403	12.1003	21.6447	55.2061
23	2.4647	3.0715	3.8197	4.7405	5.8715	7.2579	8.9543	13.5523	24.8915	66.2474
24	2.5633	3.2251	4.0489	5.0724	6.3412	7.9111	9.8497	15.1786	28.6252	79.4968
25	2.6658	3.3864	4.2919	5.4274	6.8485	8.6231	10.8347	17.0001	32.9190	95.3962
26	2.7725	3.5557	4.5494	5.8074	7.3964	9.3992	11.9182	19.0401	37.8568	114.4754
27	2.8834	3.7335	4.8223	6.2139	7.9881	10.2451	13.1100	21.3249	43.5353	137.3705
28	2.9987	3.9201	5.1117	6.6488	8.6271	11.1671	14.4210	23.8839	50.0656	164.8446
29	3.1187	4.1161	5.4184	7.1145	9.3173	12.1722	15.8631	26.7499	57.5755	197.8136
30	3.2434	4.3219	5.7435	7.6123	10.0627	13.2677	17.4494	29.9599	66.2118	237.3763

Fattore di interesse composto
di pagamenti annuali uguali

$$F/A = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

n	i = 4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	12%	15%	20%
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	2.0400	2.0500	2.0600	2.0700	2.0800	2.0900	2.1000	2.1200	2.1500	2.2000
3	3.1216	3.1525	3.1836	3.2149	3.2464	3.2781	3.3100	3.3744	3.4725	3.6400
4	4.2465	4.3101	4.3746	4.4399	4.5061	4.5731	4.6410	4.7793	4.9934	5.3680
5	5.4163	5.5256	5.6371	5.7507	5.8666	5.9847	6.1051	6.3528	6.7424	7.4416
6	6.6330	6.8019	6.9753	7.1533	7.3359	7.5233	7.7156	8.1152	8.7537	9.9299
7	7.8983	8.1420	8.3938	8.6540	8.9228	9.2004	9.4872	10.0890	11.0668	12.9159
8	9.2142	9.5491	9.8975	10.2598	10.6366	11.0285	11.4359	12.2997	13.7268	16.4991
9	10.5828	11.0266	11.4913	11.9780	12.4876	13.0210	13.5795	14.7757	16.7858	20.7989
10	12.0061	12.5779	13.1808	13.8164	14.4866	15.1929	15.9374	17.5487	20.3037	25.9587
11	13.4864	14.2068	14.9716	15.7836	16.6455	17.5603	18.5312	20.6546	24.3493	32.1504
12	15.0258	15.9171	16.8699	17.8895	18.9771	20.1407	21.3843	24.1331	29.0017	39.5805
13	16.6268	17.7130	18.8821	20.1406	21.4953	22.9534	24.5227	28.0291	34.3519	48.4966
14	18.2919	19.5986	21.0151	22.5505	24.2149	26.0192	27.9750	32.3926	40.5047	59.1959
15	20.0236	21.5786	23.2760	25.1290	27.1521	29.3609	31.7725	37.2797	47.5804	72.0351
16	21.8245	23.6575	25.6725	27.8881	30.3243	33.0034	35.9497	42.7533	55.7175	87.4421
17	23.6975	25.8404	28.2129	30.8402	33.7502	36.9737	40.5447	48.8837	65.0751	105.9305
18	25.6454	28.1324	30.9056	33.9990	37.4502	41.3013	45.5992	55.7497	75.8364	128.1167
19	27.6712	30.5390	33.7600	37.3790	41.4463	46.0185	51.1591	63.4397	88.2118	154.7400
20	29.7781	33.0659	36.7856	40.9955	45.7620	51.1601	57.2750	72.0524	102.4436	186.6880
21	31.9692	35.7192	39.9927	44.8652	50.4229	56.7645	64.0025	81.6987	118.8101	225.0256
22	34.2480	38.5052	43.3923	49.0057	55.4567	62.8733	71.4027	92.5026	137.6316	271.0307
23	36.6179	41.4305	46.9958	53.4361	60.8933	69.5319	79.5430	104.6029	159.2764	326.2368
24	39.0826	44.5020	50.8156	58.1767	66.7647	76.7898	88.4973	118.1552	184.1678	392.4842
25	41.6459	47.7271	54.8645	63.2490	73.1059	84.7009	98.3470	133.3339	212.7930	471.9810
26	44.3117	51.1134	59.1564	68.6765	79.9544	93.3240	109.1817	150.3339	245.7120	567.3772
27	47.0842	54.6691	63.7058	74.4838	87.3507	102.7231	121.0999	169.3740	283.5688	681.8527
28	49.9676	58.4026	68.5281	80.6977	95.3388	112.9682	134.2099	190.6989	327.1041	819.2232
29	52.9663	62.3227	73.6398	87.3465	103.9659	124.1353	148.6309	214.5827	377.1697	984.0678
30	56.0849	66.4388	79.0582	94.4608	113.2832	136.3075	164.4940	241.3327	434.7451	1181.8814

Fattore di recupero-capitale
di pagamenti annuali uguali

$$A/P = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

n	i = 4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	12%	15%	20%
1	1.0400	1.0500	1.0600	1.0700	1.0800	1.0900	1.1000	1.1200	1.1500	1.2000
2	0.5302	0.5378	0.5454	0.5531	0.5608	0.5685	0.5762	0.5917	0.6151	0.6545
3	0.3603	0.3672	0.3741	0.3811	0.3880	0.3951	0.4021	0.4163	0.4380	0.4747
4	0.2755	0.2820	0.2886	0.2952	0.3019	0.3087	0.3155	0.3292	0.3503	0.3863
5	0.2246	0.2310	0.2374	0.2439	0.2505	0.2571	0.2638	0.2774	0.2983	0.3344
6	0.1908	0.1970	0.2034	0.2098	0.2163	0.2229	0.2296	0.2432	0.2642	0.3007
7	0.1666	0.1728	0.1791	0.1856	0.1921	0.1987	0.2054	0.2191	0.2404	0.2774
8	0.1485	0.1547	0.1610	0.1675	0.1740	0.1807	0.1874	0.2013	0.2229	0.2606
9	0.1345	0.1407	0.1470	0.1535	0.1601	0.1668	0.1736	0.1877	0.2096	0.2481
10	0.1233	0.1295	0.1359	0.1424	0.1490	0.1558	0.1627	0.1770	0.1993	0.2385
11	0.1141	0.1204	0.1268	0.1334	0.1401	0.1469	0.1540	0.1684	0.1911	0.2311
12	0.1066	0.1128	0.1193	0.1259	0.1327	0.1397	0.1468	0.1614	0.1845	0.2253
13	0.1001	0.1065	0.1130	0.1197	0.1265	0.1336	0.1408	0.1557	0.1791	0.2206
14	0.0947	0.1010	0.1076	0.1143	0.1213	0.1284	0.1357	0.1509	0.1747	0.2169
15	0.0899	0.0963	0.1030	0.1098	0.1168	0.1241	0.1315	0.1468	0.1710	0.2139
16	0.0858	0.0923	0.0990	0.1059	0.1130	0.1203	0.1278	0.1434	0.1679	0.2114
17	0.0822	0.0887	0.0954	0.1024	0.1096	0.1170	0.1247	0.1405	0.1654	0.2094
18	0.0790	0.0855	0.0924	0.0994	0.1067	0.1142	0.1219	0.1379	0.1632	0.2078
19	0.0761	0.0827	0.0896	0.0968	0.1041	0.1117	0.1195	0.1358	0.1613	0.2065
20	0.0736	0.0802	0.0872	0.0944	0.1019	0.1095	0.1175	0.1339	0.1598	0.2054
21	0.0713	0.0780	0.0850	0.0923	0.0998	0.1076	0.1156	0.1322	0.1584	0.2044
22	0.0692	0.0760	0.0830	0.0904	0.0980	0.1059	0.1140	0.1308	0.1573	0.2037
23	0.0673	0.0741	0.0813	0.0887	0.0964	0.1044	0.1126	0.1296	0.1563	0.2031
24	0.0656	0.0725	0.0797	0.0872	0.0950	0.1030	0.1113	0.1285	0.1554	0.2025
25	0.0640	0.0710	0.0782	0.0858	0.0937	0.1018	0.1102	0.1275	0.1547	0.2021
26	0.0626	0.0696	0.0769	0.0846	0.0925	0.1007	0.1092	0.1267	0.1541	0.2018
27	0.0612	0.0683	0.0757	0.0834	0.0914	0.0997	0.1083	0.1259	0.1535	0.2015
28	0.0600	0.0671	0.0746	0.0824	0.0905	0.0989	0.1075	0.1252	0.1531	0.2012
29	0.0589	0.0660	0.0736	0.0814	0.0896	0.0981	0.1067	0.1247	0.1527	0.2010
30	0.0578	0.0651	0.0726	0.0806	0.0888	0.0973	0.1061	0.1241	0.1523	0.2008

Risposte a problemi supplementari

Capitolo 1

- 1.11. (a) -4.214×10^{-1} (e) -4.1403×10^2
 (b) 5.0296×10^{-6} (f) $1. \times 10^{-1}$ (or 1×10^{-1})
 (c) 8.231×10^1 (g) $1.000\,00 \times 10^{-1}$
 (d) $-3.865\,106\,6 \times 10^7$ (h) -8.911×10^{-4}
- 1.12. (a) $-0.4214\text{E}+0$ (c) $0.8231\text{E}+2$ (e) $-0.414\,03\text{E}+3$ (g) $0.100\,000\text{E}+0$
 (b) $0.502\,96\text{E}-5$ (d) $-0.386\,510\,66\text{E}+8$ (f) $0.1\text{E}+0$ (h) $-0.8911\text{E}-3$
- 1.13. (a) 0.2 (c) 0.000 677 6 (e) 0.000 174 8 (g) $-0.005\,675$ (i) 21 050 000
 (b) -20 (d) -67.76 (f) 645 100 (h) 0.0000001667 (j) -0.01
- 1.14. (a) incognito (c) una (e) una (g) quattro (i) sei
 (b) tre (d) quattro (f) tre (h) cinque (j) sei
- 1.15. (a) 129. (c) 0.999 (e) 1.00 (g) 1.01 (i) -0.113
 (b) $-0.004\,83$ (d) 1.00 (f) 1.00 (h) 42 600 000 (j) 0.801
- 1.16. (a) 128. (c) 0.998 (e) 0.999 (g) 1.00 (i) -0.113
 (b) $-0.004\,83$ (d) 0.999 (f) 1.00 (h) 42 500 000 (j) 0.800
- 1.17. (a) 4.934×10^{-4} (c) 5.268×10^5 (e) 3.647×10^2 (g) 4.524
 (b) 2.842×10^3 (d) 8.737×10^{-6} (f) -6.756×10^{-1} (h) 609.4
- 1.18. (a) 2.3 (b) 13 (c) 300 (d) 0.03
- 1.19. (a) 0.3054 (b) -3.491 (c) 6.283 (d) 8.727
- 1.20. (a) 5.730° (b) 171.9° (c) -2.865° (d) 458.4°
- 1.21. (a) 1 (d) $-\infty$ (g) 0 (j) 1 (m) -1
 (b) 0 (e) 0 (h) 1 (k) 0 (n) 1
 (c) 0 (appross.) (f) 0 (i) 0 (l) -1
- 1.22. $\sin(-x) = -\sin x$
- 1.23. $\cos(-x) = \cos x$
- 1.24. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- 1.25. (a) 0.965 (c) 0.015 (e) 0.999 387 5
 (b) 0.035 (d) -0.035 (f) 0.035

- 1.26. (a) 0.172 405 16 (c) 16.313 381 (e) 0.009 960 22
(b) 0.317 510 27 (d) 3.979 428 8 (f) 0.809 676 09

- 1.27. (a) 1.213 mA (b) 0.0821 (c) 3.794 s (d) V. la fig. A-1.

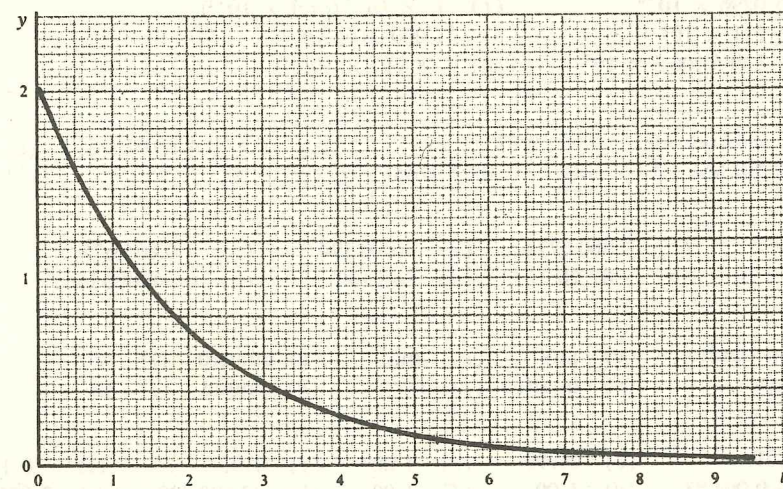


Fig. A-1

- 1.28. (a) 0.1837 (c) 25.06 h (e) V. la fig. A-2.
(b) 0.4510 (d) 0.6059

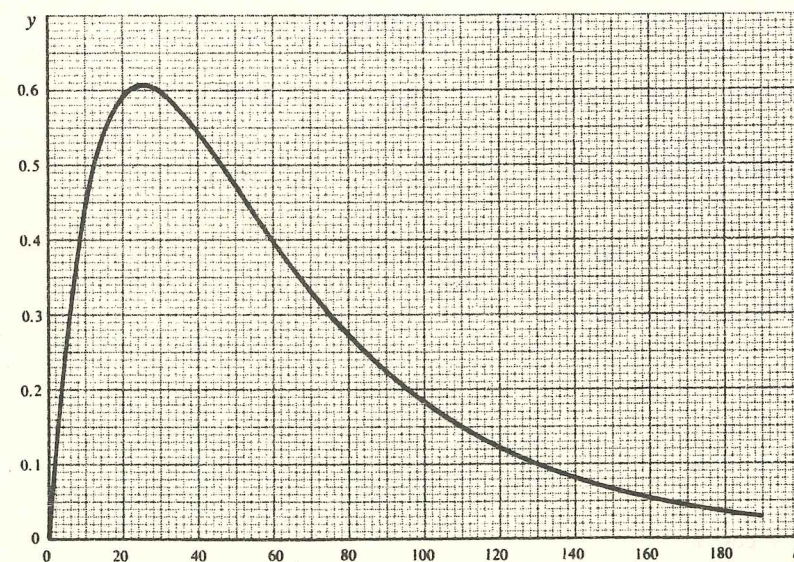


Fig. A-2

- 1.29. (a) 0.078 37 m (b) 0.053 14 m/s (c) V. la fig. A-3.

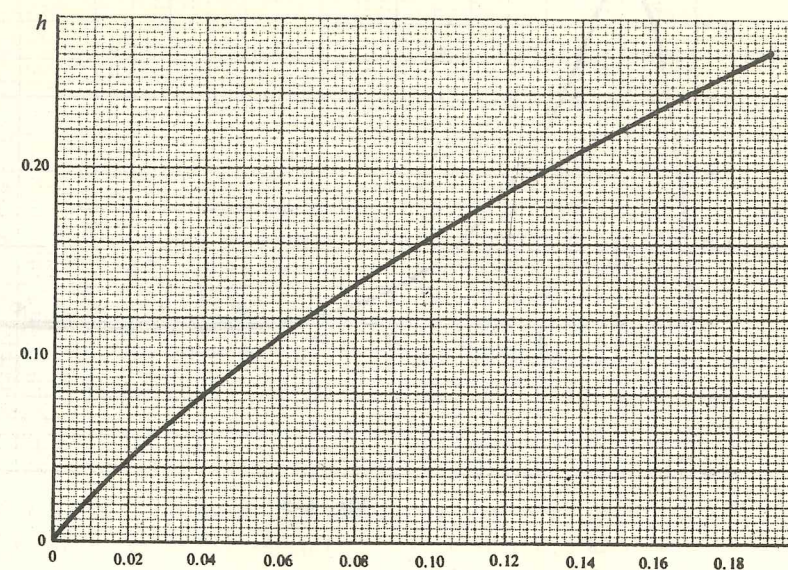


Fig. A-3

- 1.30. (a) 827.8 °C (c) 100 °C (e) V. la fig. A-4.
(b) 159.7 °C (d) 17.92 s

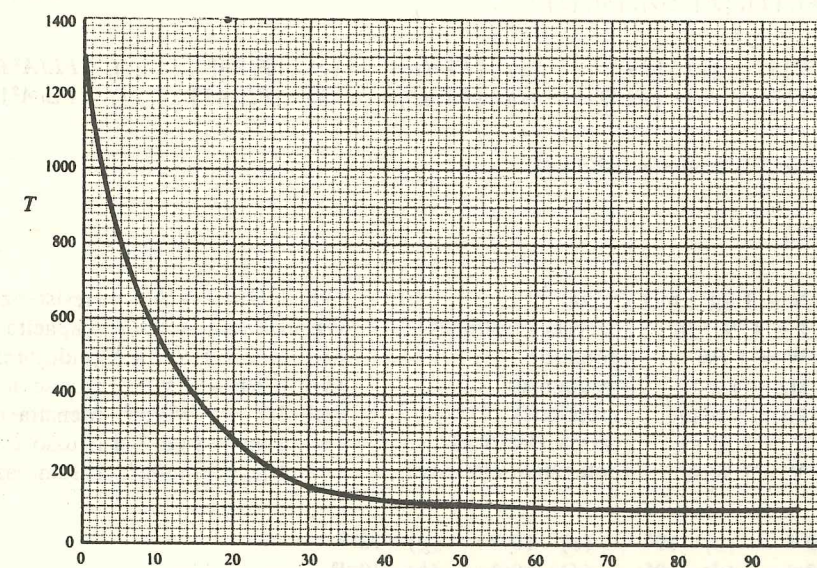


Fig. A-4

- 1.31. (a) 0 mV (c) -8.584×10^{-7} mV (e) 0 mV
(b) 0.0569 mV (d) 0.088 46 mV, a 4.636 s (f) V. la fig. A-5.

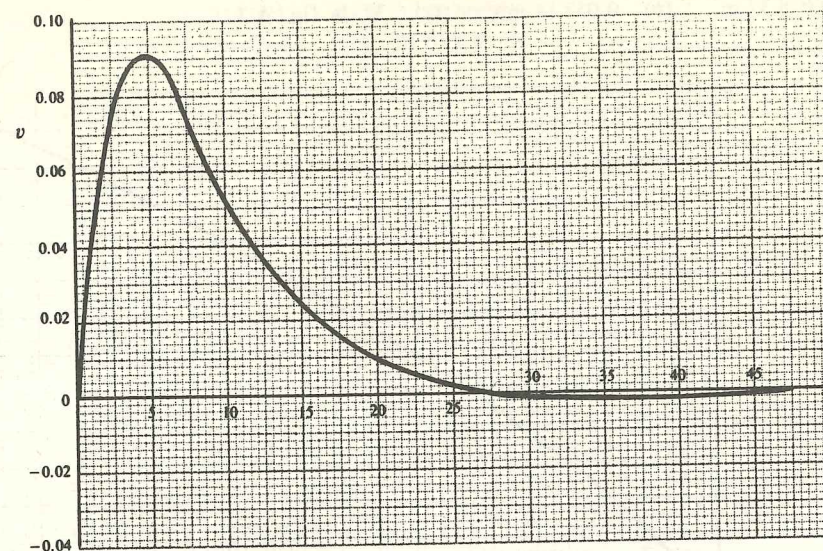


Fig. A-5

- 1.32. (a) RPN; $\sqrt{(1.47 + 0.86)(2.93 - 1.66)}$ (b) AOS; $-7.5e^{-(0.8)(3.88)/\pi}$

Capitolo 2

- 2.23. $[L], [M], [T], [A], [\theta], [I]$

- 2.24. $[L], [M], [T], [F], [Q], [\theta], [I]$

- 2.25. (a) $[FT]$ (c) $[FL]$ (e) $[FT^2/L^4]$ (g) $[F/T\theta]$ (i) $[FL/A^2T]$
 (b) $[F/L^2]$ (d) $[FL/T]$ (f) $[FT/L^2]$ (h) $[FL/AT]$ (j) $[FL/A^2]$

- 2.26. $\text{lb}_m \cdot \text{ft}/\text{sec}^2$ (chiamata *poundal*)

- 2.27. $\text{kg}_f \cdot \text{s}^2/\text{m}$

- 2.28. (a) $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}/\text{s}$ (forza) (h) $1 \Omega = 1 \text{ V}/\text{A}$ (resistenza elettrica)
 (b) $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$ (energia o lavoro) (i) $1 \text{ F} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}/\text{V}$ (capacità elettrica)
 (c) $1 \text{ W} = 1 \text{ J}/\text{s}$ (potenza) (j) $1 \text{ H} = 1 \text{ V} \cdot \text{s}/\text{A}$ (induttanza elettrica)
 (d) $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$ (frequenza) (k) $1 \text{ Wb} = 1 \text{ V} \cdot \text{s}$ (flusso magnetico)
 (e) $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N}/\text{m}^2$ (pressione) (l) $1 \text{ T} = 1 \text{ Wb}/\text{m}^2$ (densità di flusso magnetico)
 (f) $1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}$ (carica elettrica) (m) $1 \text{ lm} = 1 \text{ cd} \cdot \text{sr}$ (flusso luminoso)
 (g) $1 \text{ V} = 1 \text{ W}/\text{A}$ (potenziale elettrico) (n) $1 \text{ lx} = 1 \text{ lm}/\text{m}^2$ (illuminazione)

- 2.29. (a) 10^{-2} (c) 10^3 (e) 10^{-6} (g) 10^{-9}
 (b) 10^{-1} (d) 10^6 (f) 10^{-3} (h) 10^{-12}

- 2.30. 0.054 N 2.35. 2778 W 2.40. 0.4 F
 2.31. 4.5 m/s^2 2.36. 3.41 °C 2.41. $6 \times 10^7 \mu\text{s}$
 2.32. 0.4079 kg 2.37. 25 V 2.42. 10^6 mg
 2.33. 392.28 J 2.38. 1250 Ω 2.43. 10^9 ps
 2.34. 0.0239 kcal/s 2.39. 1200 C 2.44. 10^6

- 2.45. (a) 5630.45 poundals (c) $350 \text{ lb}_f = 11\,260.9 \text{ poundals}$
 (b) 175 lb_m (d) 175 lb_m

- 2.46. 120.65 ft/sec^2 2.48. 417.083 lb_m 2.50. 82 500 $\text{ft} \cdot \text{lb}_f/\text{sec}$ 2.52. 74.1 °F
 2.47. 298.38 $\text{ft} \cdot \text{lb}_f$ 2.49. 105 811 lb_f 2.51. 530.216 hp

- 2.53. (a) 344 lb_m (h) $2.36 \times 10^{-4} \text{ ft}$ (o) 52.4 kcal (v) 8.37 MW
 (b) 21 400 g (i) $1.98 \times 10^6 \mu\text{s}$ (p) $2.19 \times 10^5 \text{ J}$ (w) 4.49 gal
 (c) 64.7 kg (j) $12 \times 10^3 \text{ ps}$ (q) $4.66 \times 10^{-2} \text{ hp} \cdot \text{hr}$ (x) 18.9 L
 (d) 190 m (k) $1.61 \times 10^{-5} \text{ h}$ (r) $3.47 \times 10^{-2} \text{ kW} \cdot \text{hr}$ (y) 6167 m^3
 (e) 15.4 in (l) 180 lb_f (s) 5811 $\text{kW} \cdot \text{hr}$ (z) $8.1 \times 10^5 \text{ Pa}$
 (f) $2.54 \times 10^5 \text{ A}$ (m) $7.45 \times 10^5 \text{ dine}$ (t) 522 kW
 (g) 322 km (n) 3.95 N (u) 0.570 hp

- 2.54. minore

- 2.55. (a) 624.67 °R, 73.89 °C, 347.04 K (c) 666.67 K, 740.33 °F, 393.52 °C
 (b) 298.15 K, 77 °F, 536.67 °R (d) -53.15 °C, 396 °R, -63.67 °F

- 2.56. (a) 120 K, 216 °R (c) 1800 °F, 1000 °C
 (b) 25 °C, 25 K (d) 270 °F, 150 K

- 2.57. (a) 1.68 g/cm^3 (d) $7.7 \times 10^6 \text{ J}/\text{min}$ (g) $5.651 \times 10^{-5} \text{ kcal}/\text{s} \cdot \text{cm}^2$ (j) 789 L/min
 (b) 57.1 lb_m/ft^3 (e) 41 660 $\text{ft} \cdot \text{lb}_f/\text{sec}$ (h) 53 N/cm (k) 85.17 $\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}$
 (c) 31 kcal/s (f) 1290 Btu/ft^2 (i) 0.332 $\text{kg}/\text{s} \cdot \text{m}^2$ (l) 1.72 stokes

- 2.58. 25.6 N

- 2.59. 73.6 in^2

- 2.60. 0.125 $\text{ft}/\text{sec} = 0.137 \text{ km}/\text{h}$

- 2.61. (a) consistente (b) inconsistente (c) consistente

- 2.62. c è adimensionale, purché $[F] = [ML/T^2]$ (come nel SI)

- 2.63. (a) $[1/\theta]$ (b) K^{-1}

- 2.64. (a) $[ML^2/T^2\theta]$, $[L^3]$, $[ML^5/T^2]$. Se la forza è considerata una dimensione fondamentale, le dimensioni appropriate saranno $[FL/\theta]$, $[L^3]$, $[FL^4]$.
 (b) $\text{Pa} \cdot \text{m}^3/\text{mol} \cdot \text{K}$, m^3 , $\text{Pa} \cdot \text{m}^6$
 (c) $\text{atm} \cdot \text{ft}^3/\text{mol} \cdot \text{°R}$, ft^3 , $\text{atm} \cdot \text{ft}^6$

- 2.65. (a) $[M/LT^2]$ or $[F/L^2]$ (b) N/m^2 or Pa (c) in, lb_f/in^2

- 2.66. (a) $[M/T^3\theta]$ or $[F/LT\theta]$ (b) $\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}$ (c) $\text{Btu}/\text{hr} \cdot \text{ft}^2 \cdot \text{°F}$ or $\text{Btu}/\text{hr} \cdot \text{ft}^2 \cdot \text{°R}$

Capitolo 3

- 3.10. (a) 180 m (c) $195 - 155 = 40$ m (e) $6.4 - 5.5 = 0.9$ s (g) 5.5 s
(b) 78 m (d) 4.5 s (f) $5.2 - 3.5 = 1.7$ s
- 3.11. (a) 1.73 mol/L
(b) 2.05 mol/L, assumendo che la curva rimanga piatta
(c) 2.8 s
(d) $5.8 - 2.6 = 3.2$ s
(e) $1.24 - 1.20 = 0.04$ mol/L; $(0.04/1.24) \times 100 = 3.2$ %, con riferimento al valore effettivo (misurato)
- 3.12. (a) 100%, 65.5%, 7.5% (c) 1268 K, 1305 K
(b) 1248 K, 1288 K, 1326 K (d) 1313 K, 62%
- 3.13. (a) $(-2.6) - (-0.6) = -2.0$ N
(b) $(-0.6) - (+0.6) = -1.2$ N
(c) Il segno meno indica che il cambiamento netto nella forza agisce nella direzione di diminuire lo spostamento.
- 3.14. (a) 360×10^7 N/m² (b) 0.002 25 (c) $(450 \times 10^{-5}) \left(\frac{0.001}{200 \times 10^7} \right) = 2.25 \times 10^{-15}$
- 3.15. (a) 5.5 % (b) 89.9–90.1 mm
- 3.16. (a) 7% (b) 90.01 mm (c) 89.71 mm
- 3.17. (a) $y = 0.64$ (c) $x = 1.8$ (e) $\frac{\log 0.1 - \log 10}{9.2 - 0} = -0.217$
(b) $y = 0.1$ (d) $x = 6.45$
- 3.18. (a) 4.6×10^5 s⁻¹ (c) $306 - 324 = -18$ K
(b) 336 K (d) $\frac{\log(1 \times 10^5) - \log(1000 \times 10^5)}{0.00346 - 0.00290} = -5360$
- 3.19. (a) 3 (d) 4.5
(b) 1.05 (e) $\frac{\log 10.44 - \log 0.2}{\log 9 - \log 1} = 1.8$
(c) 1.25
- 3.20. (a) 114 °C, 86 °C, 114 °C, 86 °C (b) 119 °C, 102 °C, 92 °C, 116 °C (c) 105° and 255°
- 3.21. (a) 55% Y, 45% X (c) 75% Z, 25% Y (e) 5% X, 85% Y, 10% Z
(b) 90% X, 10% Z (d) 15% X, 20% Y, 65% Z
- 3.22. (a) 15% benzene, 65% acetone (c) regione monofasica
(b) regione bifasica (d) 25% acqua, 12% benzene, 63% acetone
- 3.23. (a) $71 - 48 = 23$ % (b) $3.5 - 0.8 = 2.7$ %
- 3.24. $F = -30x$

- 3.25. $F = \begin{cases} -18x & x < 0 \\ -12x & x > 0 \end{cases}$
- 3.26. I valori massimi relativi sono circa 85 e 90 ppm, e si verificano press'a poco alle 10 del mattino e alle 6 del pomeriggio, rispettivamente. Il minimo assoluto è 11.9 ppm, alle 4 del mattino. Altri minimi (relativi) sono 39.2 ppm e 28.7 ppm, che si hanno alle 3 del pomeriggio e a mezzanotte.
- 3.28. (d) $v = 0.1(1 - e^{-0.2t})$
- 3.29. (c) $\mu = 1.1 \times 10^6 T^{-1.5}$
- 3.30. $A = 6 \times 10^{12}$ s⁻¹, $E = 80\,000$ J/mol
- 3.31. $c_1 = 0.1$ h⁻¹, $c_2 = 0.015$ h⁻¹
- 3.32. Riportare in grafico $T - 100$ in funzione di t .
- 3.37. (c) I voti degli esami non sono distribuiti in forma normale, poiché la distribuzione cumulativa non può venire rappresentata da una retta nel grafico di probabilità.
- 3.38. (b) Un sistema di coordinate semilogaritmiche, con la scala logaritmica lungo l'ascissa. Riportare in grafico h in funzione di $\log(1 + 8v)$.
- 3.40. $T = 50 + 30 \sin \theta$
- 3.41. (a) 1.52, 2.83, 0.23, 0.99 m (b) 1.6, 6.9, 7.4, 5.5 ft
- 3.47. (a) 8.1 (b) 4.8 (c) 27.5 (d) 12.6
- 3.48. (a) -27 (b) 32 (c) 4.5 (d) -5.5
- 3.49. (a) 109 (b) 122 (c) 45 (d) 4 (e) 56
- 3.50. (a) 10.9 (b) 13.5 (c) 21 (d) 8.9
- 3.51. (a) 8.1 lb SO₂/10⁶ Btu (b) 1.4 % di zolfo (c) 8000 Btu/lb

Capitolo 4

- 4.24. (a) ± 5 V (b) 175 V (c) 175 ± 5 V (d) 340 ± 5 V (e) 60 ± 5 V
- 4.25. (a) ± 2.5 m³/min
(b) 65 ± 2.5 m³/min. (Se la portata venisse registrata come 65.0 ± 2.5 m³/min, le ultime due cifre sarebbero incerte.)
(c) 22.5 ± 2.5 m³/min ovvero, arrotondato per difetto, 22 ± 2.5 m³/min.
(d) 77.5 ± 2.5 m³/min ovvero, arrotondato per eccesso 78 ± 2.5 m³/min.

- 4.26. (a) Poiché il punto di ebollizione dell'acqua pura è 100 °C (alla pressione atmosferica), risulta che le misure sono errate in eccesso di circa 3 °C. Si tratta di un errore sistematico.
(b) La dispersione nei dati indica la presenza di errori casuali.
(c) Sottrarre 3 °C da ciascuna temperatura, porre quindi i dati corretti in grafico ed interpolare una curva continua fra i punti-dato.
- 4.27. (a) -3.01 °C
(b) -0.07, 0.11, 0.07, -0.04, 0.04, -0.13, -0.01 °C
(c) Per questo particolare gruppo di dati, la media non risulterà influenzata (la media dei cinque punti rimanenti è ancora - 3.01 °C).
- 4.28. (a) 11.9 cm
(b) 0.3, -0.2, 0.5, 0.1, -1.5, 0.0, 0.5 cm
(c) Verrà scartata la quinta misura, ottenendo una nuova media di 12.1 cm (determinata sulla base delle sei misure rimanenti).
(d) 0.1, -0.4, 0.3, -0.1, -0.2, 0.3 cm
- 4.29. (a) 0.012 m/s² (b) 0.001 224 (c) 0.1224 %
- 4.30. (a) 29.13 mph (b) 53.40 mph (c) 77.67 mph
- 4.31. (a) -6.83 % (b) \$0.44
- 4.32. (a) 4.4 % (b) 450-550 μF
- 4.33. (a) 14.98 m³ (b) 1.976 %
- 4.34. (a) $\frac{2396 \text{ mi}}{103.9 \text{ gal}} = 23.06 \text{ mpg}$ (b) 21.96 mpg
- 4.35. 260.5 V
- 4.36. (a) 5.32 % (b) 47.2% di carbone ad alto zolfo, 52.8% di carbone a basso zolfo
- 4.37. 559.4 mmHg
- 4.38. 2.941
- 4.39. 3.352
- 4.40. 2.976
- 4.41. (a) $\bar{x} = 8.0$, $\tilde{x} = 8.0$, moda = 8.2, $v = 0.125$, $s = 0.354$
(b) $\bar{x} = 139.25$, $\tilde{x} = 139$, $v = 172.94$, $s = 13.15$
(c) $\bar{x} = 65.74$; $\tilde{x} = 65.4$; moda = 65.4, 67.2; $v = 1.262$; $s = 1.124$
(d) $\bar{x} = 0.53$, $\tilde{x} = 0.8$, $v = 12.1$, $s = 3.5$
- 4.42. $\bar{x}_A = 3669.2 \text{ N}$, $s_A = 181.6 \text{ N}$; $\bar{x}_B = 3595.7 \text{ N}$, $s_B = 252.2 \text{ N}$. Il gruppo di dati A sembra più preciso, in quanto la sua deviazione standard è minore.

- 4.43. \$24 018
- 4.44. 10
- 4.45. V. la tab. A-1, colonne 1 ÷ 3.

Tabella A-1

Intervallo	Numero di punti-dato	Frequenza relativa, %	Frequenza relativa cumulativa, %
0.01-5	0	0	0
5.01-10	1	2	2
10.01-15	1	2	4
15.01-20	1	2	6
20.01-25	1	2	8
25.01-30	1	2	10
30.01-35	0	0	10
35.01-40	1	2	12
40.01-45	4	8	20
45.01-50	5	10	30
50.01-55	2	4	34
55.01-60	3	6	40
60.01-65	4	8	48
65.01-70	6	12	60
70.01-75	1	2	62
75.01-80	7	14	76
80.01-85	3	6	82
85.01-90	3	6	88
90.01-95	2	4	92
95.01-100	4	8	100
Totali	50	100%	

- 4.46. (a) $\bar{x} = 63.54$, $s = 22.67$ (b) $\bar{x} = 63.30$, $s = 22.61$
- 4.47. V. la tab. A-1, colonna 4.
- 4.48. $\tilde{x} = 65.84$
- 4.49. $\bar{x} = 4.98$, $\tilde{x} = 4.50$, $s = 1.94$
- 4.50. $\bar{x} = 90.00 \text{ mm}$, $\tilde{x} = 90.00 \text{ mm}$, $s = 0.2545 \text{ mm}$
- 4.51. (a) 12 studenti (b) 24 studenti (c) 62 - 40 = 22 studenti
- 4.52. (a) 16% (c) 90% (e) 90 - 16 = 74%
(b) 100 - 16 = 84% (d) 10% (f) 66 - 46 = 20%
- 4.53. (a) 6.2 ppm (b) 1 ppm o meno

- 4.54. (a) 14.5% (b) $13.5 + 4.5 = 18.0\%$ (c) 9.0% (d) $100.0 - 9.0 = 91.0\%$
(e) 1.5%
- 4.55. (a) $\bar{x} = 10.1$, $s = 3.4$ (b) $\bar{x} = 4.45$, $s = 1.90$
- 4.56. La curva normale a forma di campana dà meglio un'idea del carattere della distribuzione normale, ma la retta nel grafico di probabilità è più facile da disegnare e da interpretare.
- 4.57. $\mu = 62$, $\sigma = 25$
- 4.58. La mediana e la moda coincidono con la media, il cui valore è circa 62.
- 4.59. (a) La curva risulterebbe spostata a destra (per un aumento di μ) o a sinistra (per una diminuzione).
(b) La curva diventerebbe più bassa e più larga (per un aumento di σ) o più alta e più stretta (per una diminuzione).
- 4.60. $F = -1.667 + 0.667x$
- 4.61. $S = -6.06338 + 5.26441\rho$
- 4.62. $y = 0.80 - 187.5x$
- 4.63. (a) $v = 1.49853r^{0.80185}$ (b) $\mu = 0.947919 \times 10^6 T^{-1.47482}$
- 4.64. (a) $k = 3.63727 \times 10^{23} e^{-12364/T}$ (b) $d = 0.10017e^{2.99923t}$ (c) $k = 6.61287 \times 10^{12} e^{-9658/T}$
- 4.65. $R = 1000 - 999.82e^{-0.07998x}$
- 4.66. (a) $E = 2.10436 \times 10^{-3} T^{2.32546}$
(b) $E = 0.261197 - 0.146182T + 0.0165635T^2$
(c) La funzione quadratica fornisce la migliore interpolazione.
- 4.68. (a) $r = 0.992728$. I dati si possono rappresentare con precisione con una retta a pendenza positiva.
(b) $r = -0.310370$. I dati non possono venire rappresentati con precisione da una retta.
(c) $r = -0.997776$. I dati si possono rappresentare con precisione mediante una retta con pendenza negativa.

Capitolo 5

- 5.16. (a) $x = 1.36$ (c) $x = 2.00$ (e) $x = 1.16$
(b) $x = 1.57$ (d) $x = 1.25$ (f) $x = 2.41$
- 5.17. $x = -2.2$, $x = 1.4$, $x = 3.6$
- 5.19. (a) $x = 1.35196$ (e) $x = 1.16556$ (h) $x = -1.718960$
(b) $x = 1.56895$ (f) $x = 2.41201$ $x = 1.951343$
(c) $x = 2.00000$ (g) $x = -0.60400$ $x = 14.434284$
(d) $x = 1.25000$

- 5.24. (a) 13 iterazioni (b) 9.2×10^{-5} , 4 decimali
- 5.25. (a) $t = 0.534$ ms
(b) $v_{\max} = 1.490$ mV, $t = 2.747$ ms
(c) $v_{\min} = -0.795$ mV, $t = 9.03$ ms
- 5.26. $T = 4^\circ\text{C}$, $V_{\min} = 0.9998 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg}$
- 5.27. $R = 0.1413$ m
- 5.28. (a) $x = 2.218$ (b) $R = 11.09$ mm
- 5.29. (a) 0.00708333 (0.71% al mese) (b) 0.085 (8.5% all'anno) (c) \$110725
- 5.30. (a) $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 4$
(b) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$
(c) $x_1 = 0.5$, $x_2 = -1.5$, $x_3 = 2.5$, $x_4 = -2$
(d) $x_1 = 2.9792$, $x_2 = 2.2156$, $x_3 = 0.2113$, $x_4 = 0.1523$, $x_5 = 5.7150$
- 5.35. 28.788 tonn. A1/giorno, 6.291 tonn. A2/giorno, 25.349 tonn. A3/giorno, 44.686 tonn. A4/giorno
- 5.36. (a) Un gruppo è:

$$\begin{array}{ll} I_1 + I_2 + I_3 = 2 & 10I_1 - 40I_2 + 10I_4 = 0 \\ I_1 - I_4 + I_6 = 0 & 10I_4 + 2I_6 - 50I_7 = 0 \\ I_6 + I_7 + I_{10} = 3 & 50I_7 - 10I_8 - 5I_{10} = 0 \\ I_8 - I_9 - I_{10} = 0 & 20I_5 - 10I_8 - 10I_9 = 0 \\ I_3 - I_5 - I_9 = 0 & 40I_2 - 5I_3 - 20I_5 = 0 \end{array}$$
(b) $I_1 = 0.406$ A $I_3 = 1.048$ A $I_5 = 0.829$ A $I_7 = 0.410$ A $I_9 = 0.219$ A
 $I_2 = 0.546$ A $I_4 = 1.776$ A $I_6 = 1.369$ A $I_8 = 1.439$ A $I_{10} = 1.221$ A
- 5.37. $T_0 = 197.0^\circ\text{C}$, $T_1 = 49.3^\circ\text{C}$, $T_2 = 43.4^\circ\text{C}$, $T_3 = 23.7^\circ\text{C}$
- 5.39. (a) 131.3 km
- 5.43. (a) 0.693 (b) 3.14 (c) 0.479 (d) -0.747
- 5.46. (a) 1.250 (b) 1.330
- 5.47. 1.333333
- 5.48. (a) 1.333333 (b) 1.333333
- 5.49. (a) 1 (b) 0.159777 (c) -0.186633 (d) 2/3
- 5.50. (a) 37860 bbl (b) 105.2 bbl/giorno
- 5.51. (a) 40.4 ppm (b) 50.9 ppm

- 5.52. (a) 95.7 s (b) 98.7 s (c) 101.7 s (d) $\frac{30}{101.7} = 0.295 \text{ km/s}$ (e) 2.58 km/s
(Risposte ottenute con intervalli di 2 km.)

5.53. 653.3 °C

5.54. 55.04 mV

5.55. $0.4363 \times 10^{-3} \text{ m}^3$

Capitolo 6

- 6.10. (a) 2.2500 (c) 2.0125 (e) 3.5000
(b) 1.9000 (d) 1.6600 (f) 1.5625

- 6.11. (a) 3.3864 (c) 2.6639 (e) 10.5451
(b) 2.3818 (d) 1.8704 (f) 1.7285

- 6.12. (a) \$3500 (b) approssimativamente del 7% per anno.

- 6.13. L'interesse semplice cresce linearmente, l'interesse composto cresce esponenzialmente.

- 6.14. (a) \$13 266.49 (b) \$13 507.42 (c) \$16 035.68 (d) \$16 453.31

- 6.15. (a) \$4006.41 (b) \$4006.95

- 6.16. \$4045.80 (un aumento di quasi 40 dollari)

- 6.18. 8% all'anno

- 6.19. (a) \$21 459.35 (b) \$22 160.23 (c) \$22 324.85 (d) \$22 408.44
Il conteggio continuo degli interessi frutta quasi 1000 dollari in più del conteggio annuale. Per contro, la differenza fra il conteggio continuo ed il conteggio mensile è piccola.

- 6.20. 11 anni

- 6.21. (a) 47.7271 (c) 24.6504 (e) 76.3608
(b) 18.4237 (d) 7.9129 (f) 12.9510

- 6.22. (a) \$79 058.19 (b) 33 anni

- 6.23. \$1264.89

- 6.24. $\frac{\$1264.89}{1.06} = \$1193.29$

- 6.25. 62.4 anni

- 6.26. (a) 0.0710 (c) 0.1081 (e) 0.1381
(b) 0.1293 (d) 0.2364 (f) 0.1335

- 6.27. (a) \$15 260
(b) 12.8 anni
(c) La somma risparmiata non risulterà mai esaurita, poiché ogni anno vengono prelevati soltanto gli interessi annuali (mentre il capitale rimane intatto).

- 6.28. 10.6% all'anno

- 6.29. (a) \$626.25 (b) \$631.25

- 6.30. (a) Il pagamento in un'unica soluzione, depositato in banca, produrrà pagamenti annuali uguali di 53 391.56 dollari per 20 anni. Sarebbe quindi saggio accettare il pagamento in un'unica soluzione.
(b) No, poiché le tasse verosimilmente riducono in maniera significativa la somma di denaro che può venire depositata in banca.

- 6.31. $A = (1 + ni)P/12n$

- 6.32. Il prestito per l'acquisto di un'automobile ad interesse semplice costerebbe 160.00 dollari al mese, mentre il prestito convenzionale costerebbe 158.000 dollari al mese. Perciò il prestito convenzionale, nonostante il tasso d'interesse annuale più elevato, risulterà alquanto meno costoso.

- 6.33. (a) \$523.40
(b) 157 020 dollari, inclusi 92 020 di interesse (si noti che gli interessi sono sensibilmente superiori al prestito originario).

- 6.34. (a) \$164 324 (b) \$350 271 (c) \$312 667

- 6.35. (a) \$300 000 (b) \$109 637 (c) -\$8 613 (d) -\$110 304

- 6.36. Il valore attuale avrà valore zero ad un tasso d'interesse annuale di circa il 6.8%. A questo tasso d'interesse, i redditi futuri previsti compenseranno esattamente la spesa iniziale.

- 6.37. (a) \$300 000 (b) \$138 790 (c) -\$13 027 (d) -\$195 325

- 6.38. 6.8% (come nel problema 6.36)

- 6.39. $P = \$287 235$ $F = \$634 820$

- 6.40. (a) $P_A = \$250 000$ (b) $P_A = \$149 351$ (c) $P_A = \$68 613$
 $P_B = \$320 000$ $P_B = \$175 444$ $P_B = \$63 410$
Investimento prescelto B Investimento prescelto B Investimento prescelto A

- 6.41. $P_A = \$23 558$, $P_B = \$5042$; l'investimento A è perciò quello da preferire. Se non si considera il valore del denaro nel tempo, si ha $P_A = P_B = \$350 000$. Con ciò gli investimenti sarebbero di interesse equivalente.

- 6.42. $P_1 = \$9 050 000$ per l'impianto centro-occidentale, $P_2 = \$11 624 000$ per l'impianto della costa occidentale; costruire l'impianto della costa occidentale.

6.43. $P_1 = \$9\,050\,000$ per l'impianto centro-occidentale, $P_2 = \$7\,118\,000$ per l'impianto sulla costa occidentale; ampliare l'impianto centro-occidentale

6.44. $P_1 = \$5\,000\,000$, $P_2 = \$5\,036\,000$; è migliore la prima proposta.

6.45. $P_1 = \$5\,000\,000$, $P_2 = \$4\,851\,537$; è migliore la seconda proposta.

Capitolo 7

7.8. V. la fig. A-6.

7.9. V. la fig. A-7.

7.10. (b) V. la fig. A-8.

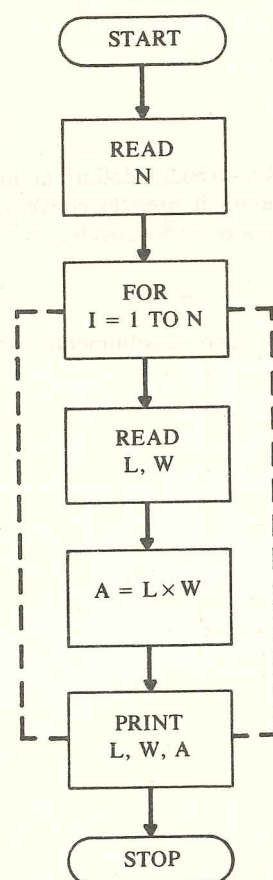


Fig. A-6

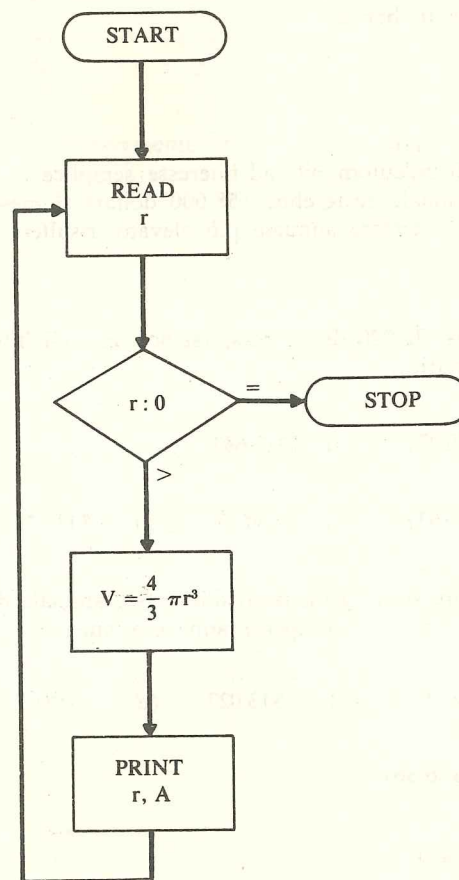


Fig. A-7

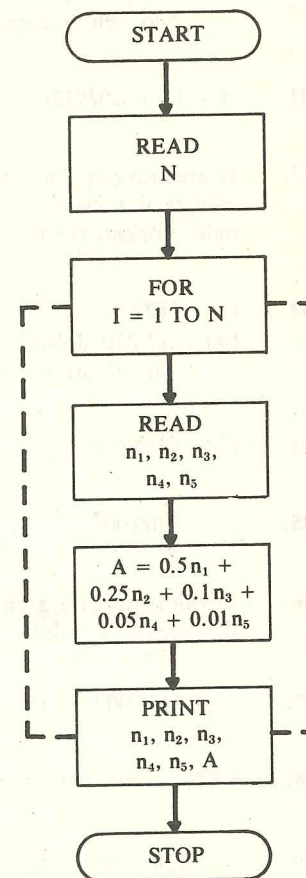


Fig. A-8

7.11 (c) V. la fig. A-9.

7.12. V. la fig. A-10.

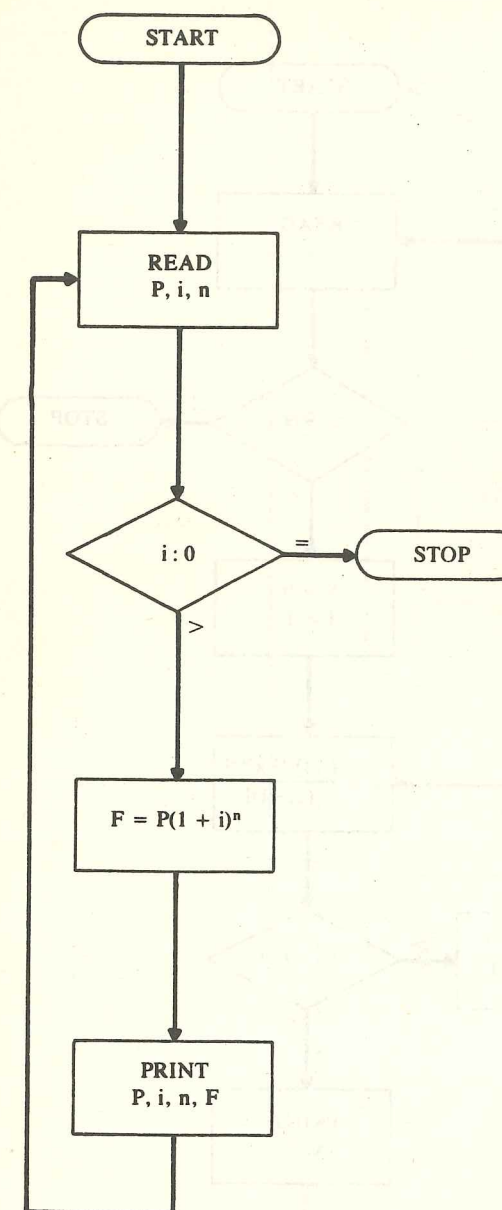


Fig. A-9

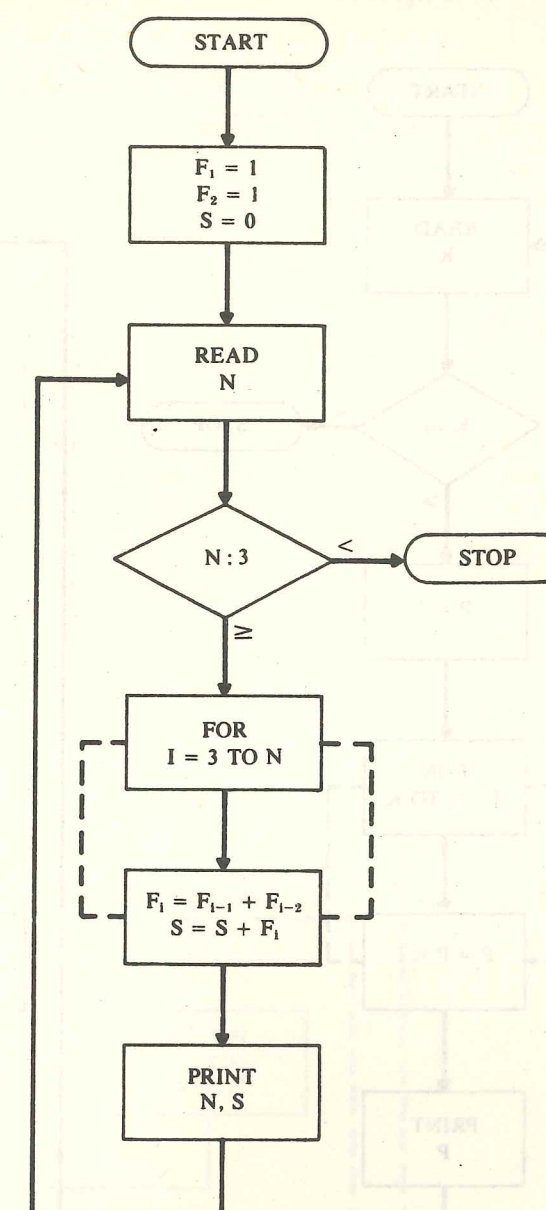


Fig. A-10

7.15. V. la fig. A-11.

7.17. V. la fig. A-12.

7.18. V. la fig. A-13.

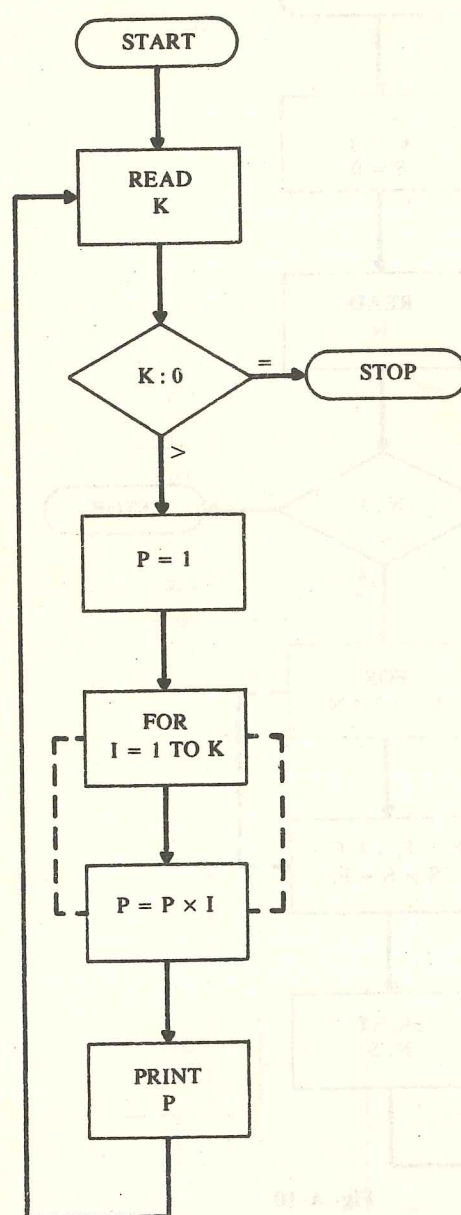


Fig. A-11

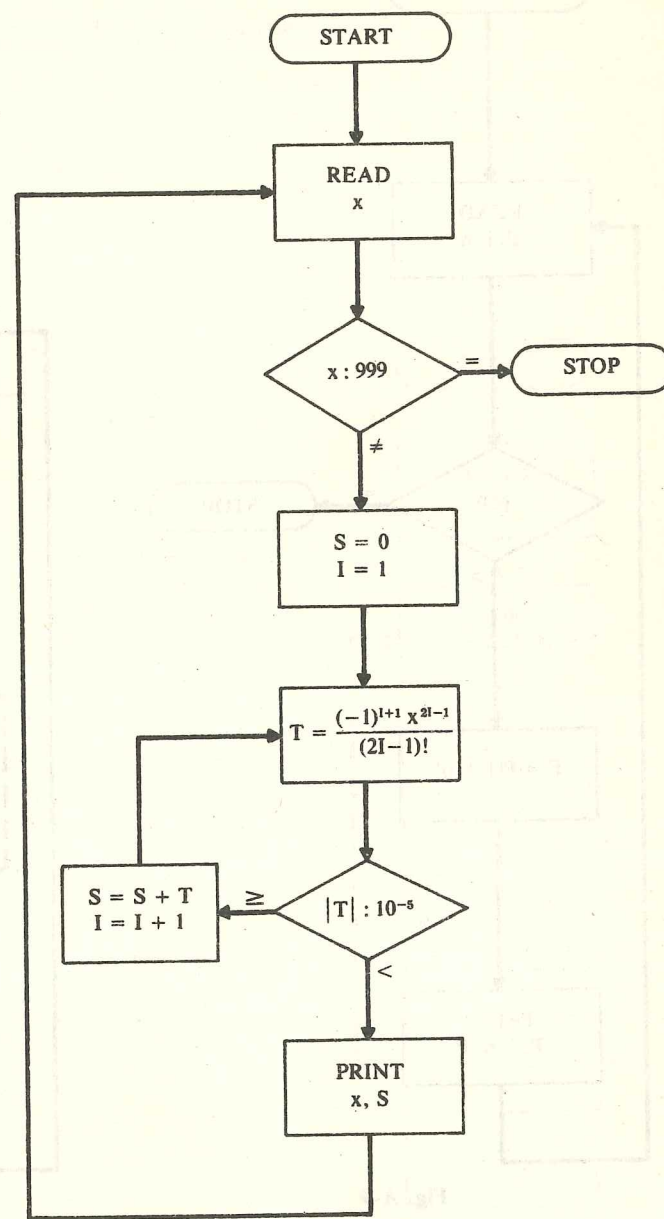


Fig. A-12

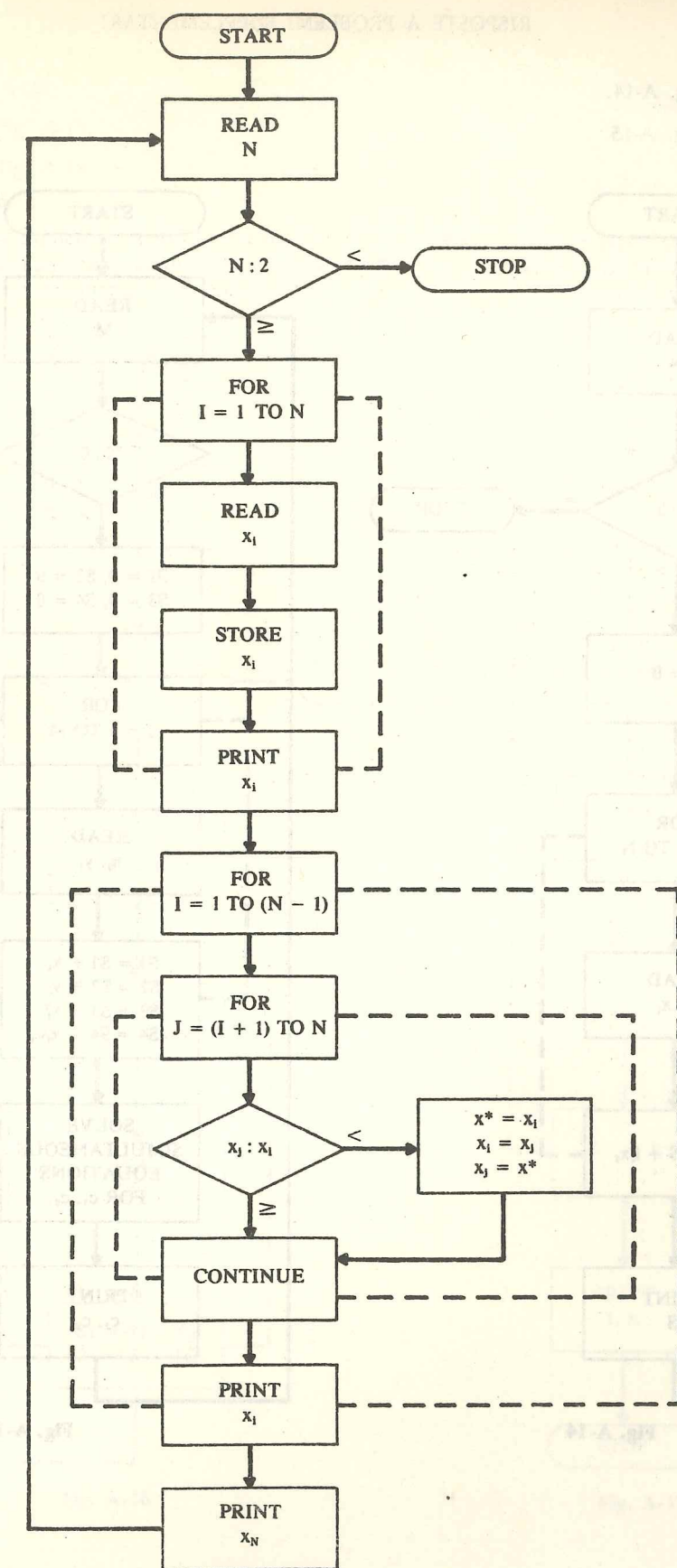


Fig. A-13

7.19. V. la fig. A-14.

7.21. V. la fig. A-15.

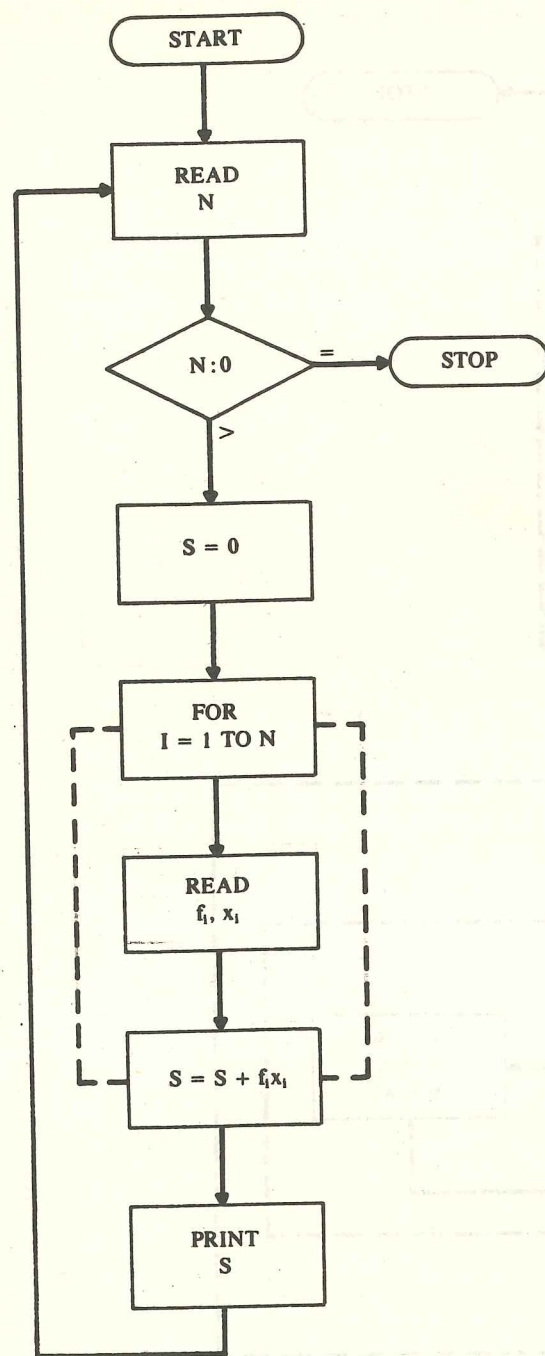


Fig. A-14

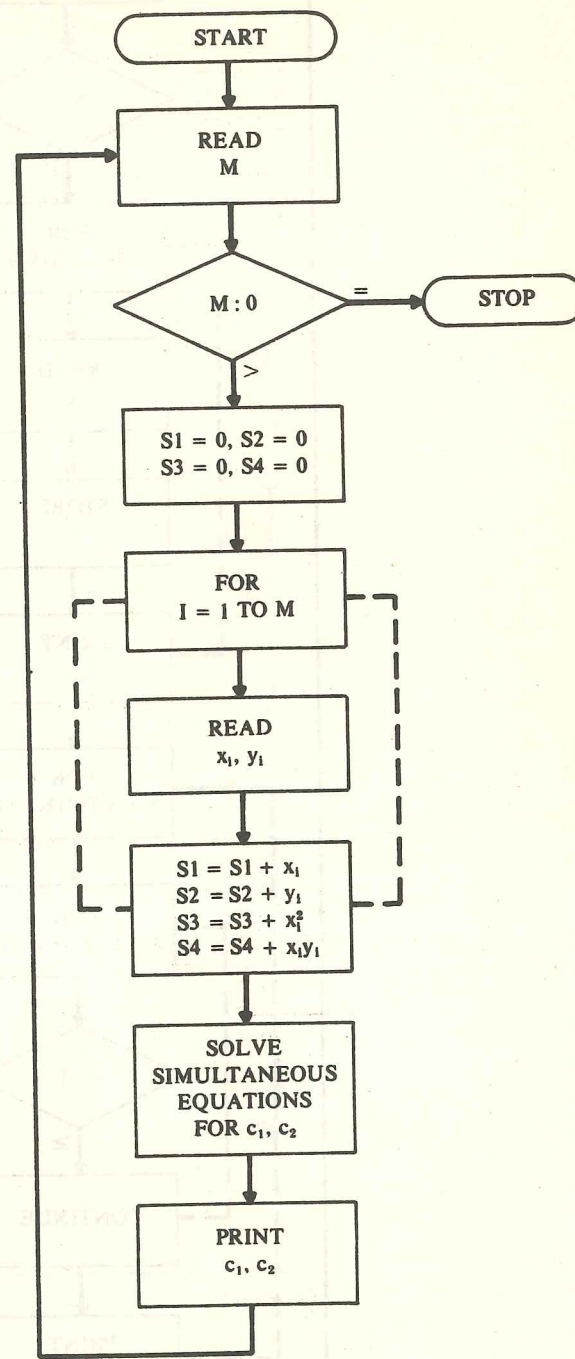


Fig. A-15

7.24. V. la fig. A-16.

7.25. (a) V. la fig. A-17.

7.26. (a) V. la fig. A-18.

In fig. A-16.

Sia N = numero di corsi per semestre
 C_i = numero di crediti per il corso i -esimo
 G_i = voto ottenuto nel corso i -esimo

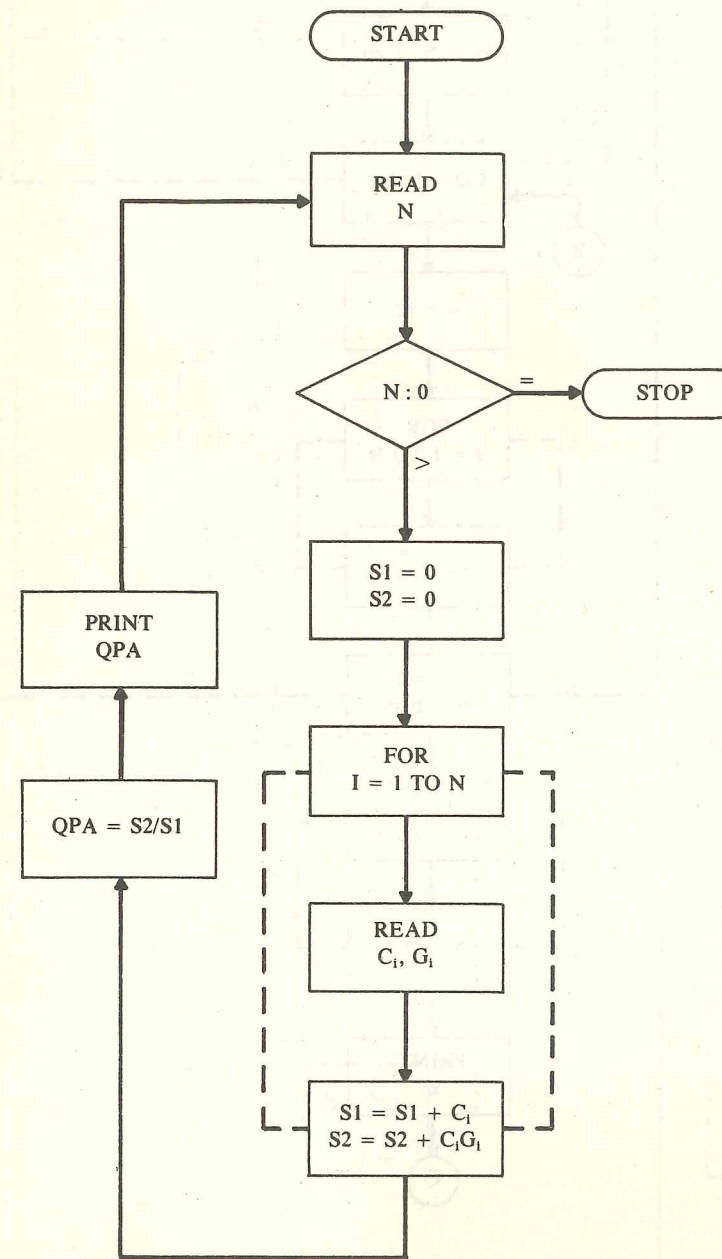


Fig. A-16

In fig. A-17.

Sia N = numero massimo di iterazioni
 x_0 = valore iniziale di tentativo
 ϵ = criterio di convergenza

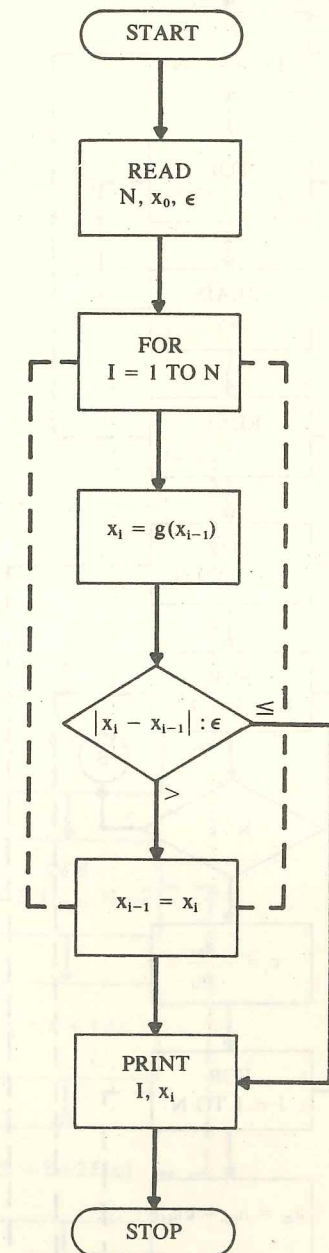


Fig. A-17

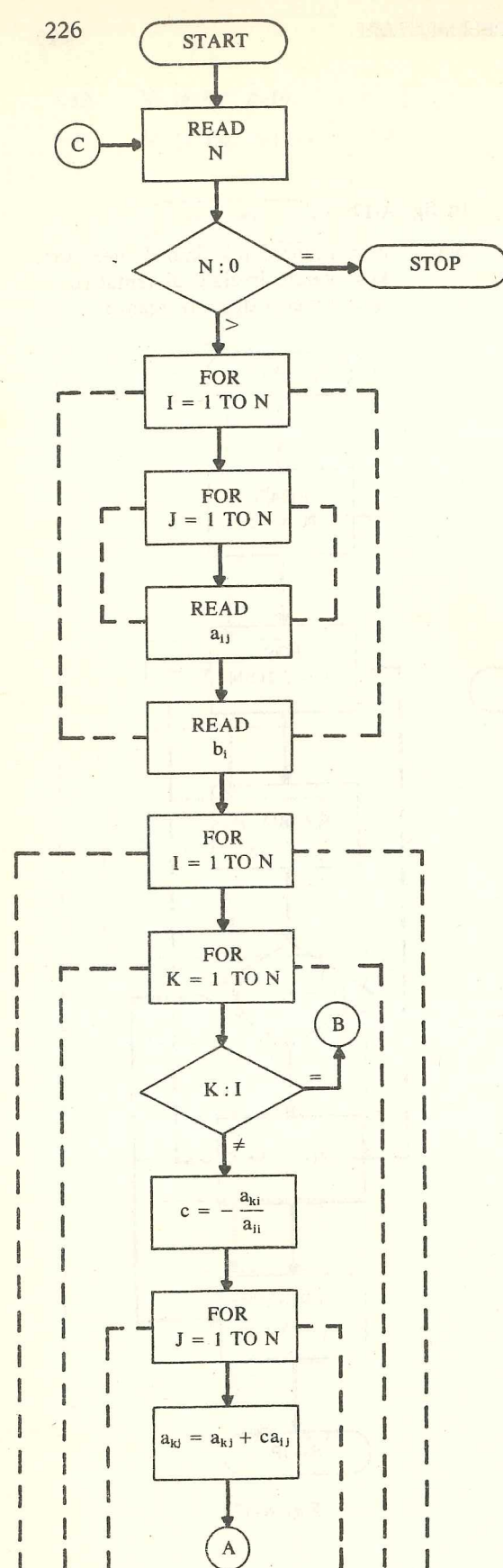
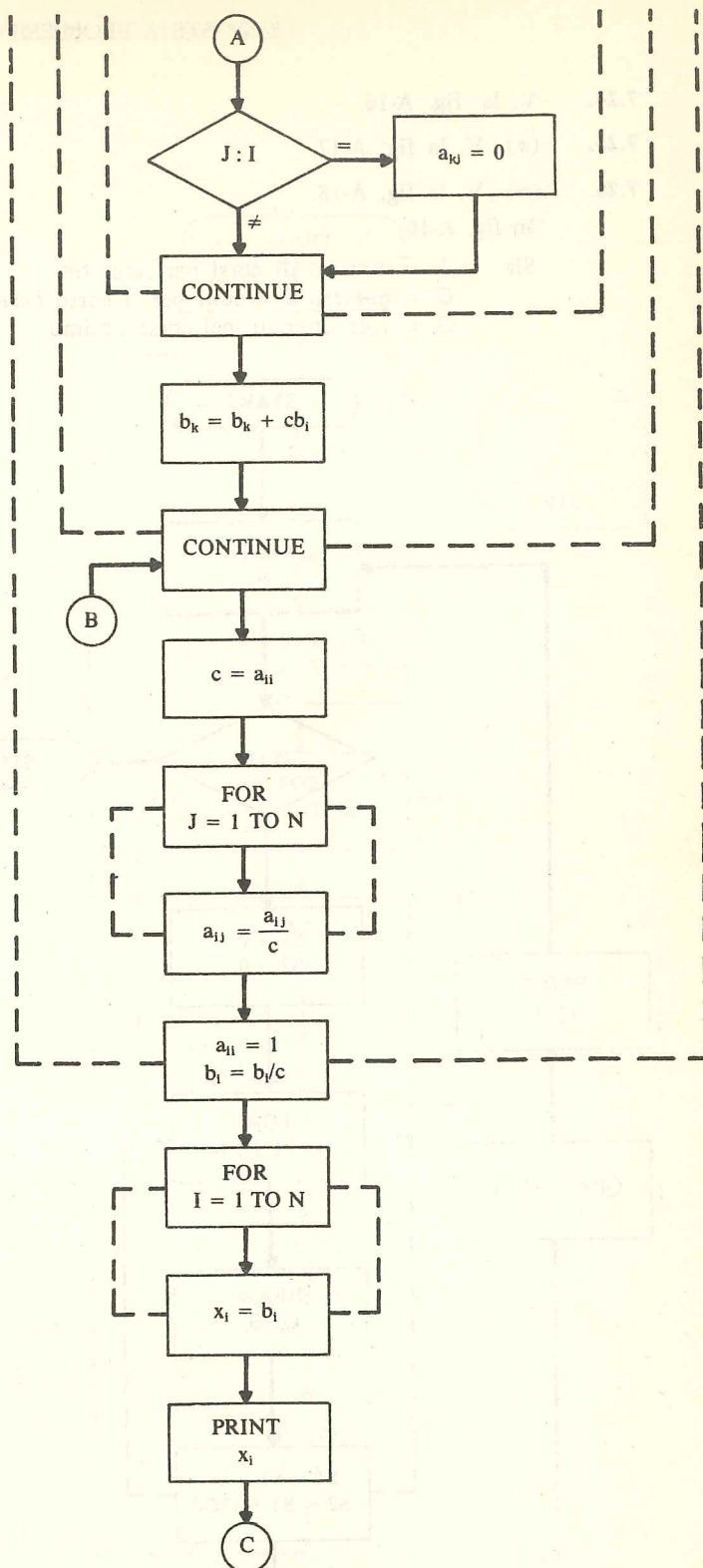


Fig. A-18



7.27. V. la fig. A-19.

7.28. (b) V. la fig. A-20.

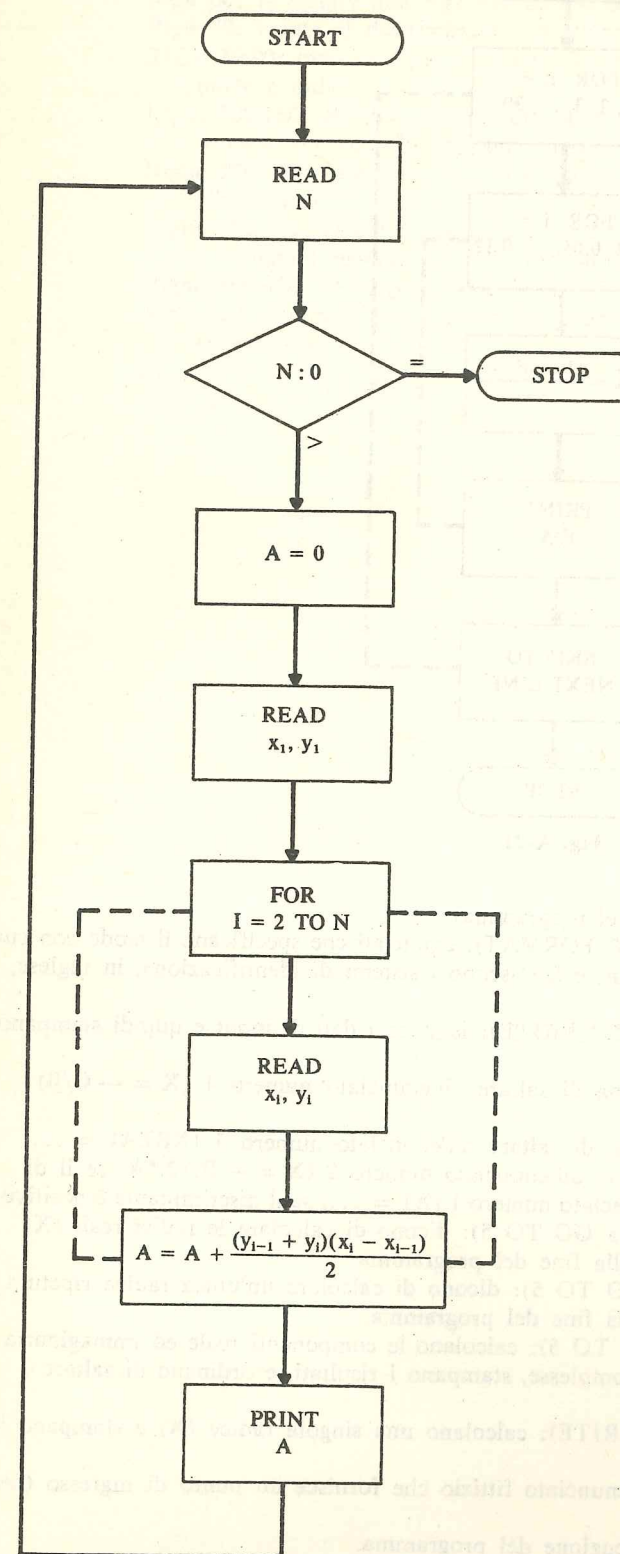


Fig. A-19

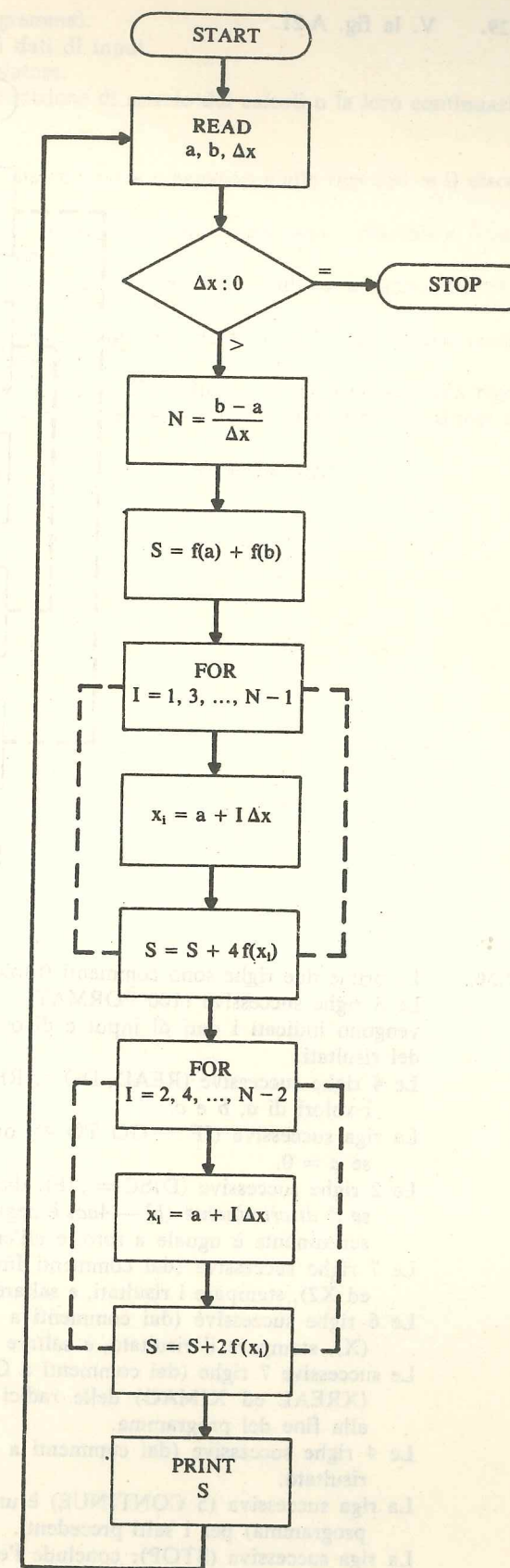


Fig. A-20

7.29. V. la fig. A-21.

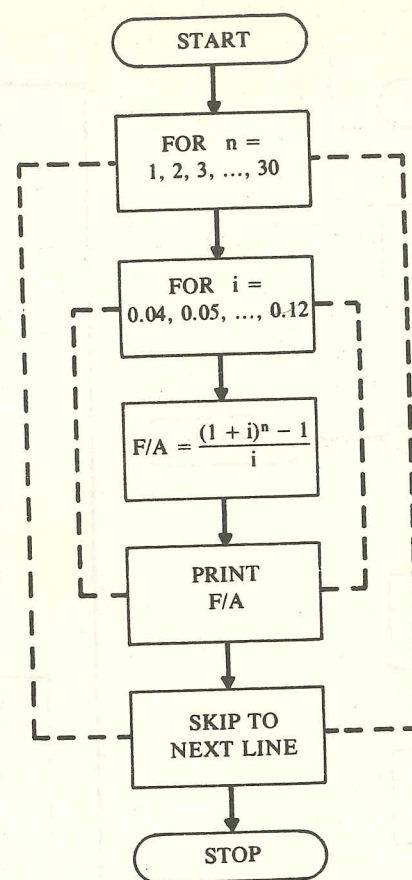


Fig. A-21

- 7.30. Le prime due righe sono commenti (titolo del programma).
 Le 8 righe successive (100 FORMAT ... 700 FORMAT): enunciano che specificano il modo con cui vengono indicati i dati di input e di output, e forniscono i sistemi di identificazione, in inglese, dei risultati.
 Le 4 righe successive (READ, DO 5, READ, WRITE): leggono i dati di input e quindi stampano i valori di a , b e c .
 La riga successiva (IF ... GO TO 4): ordina di saltare all'enunciato numero 4 ($X = -C/B$) se $a = 0$.
 Le 2 righe successive (DISC = , IF): dicono di saltare all'enunciato numero 3 ($XREAL = \dots$) se il discriminante ($b^2 - 4ac$) è negativo, all'enunciato numero 2 ($X = -B/(2 \cdot A)$) se il discriminante è uguale a zero, e all'enunciato numero 1 ($X1 = \dots$) se il discriminante è positivo.
 Le 7 righe successive (dai commenti fino a GO TO 5): dicono di calcolare le radici reali ($X1$ ed $X2$), stampare i risultati, e saltare alla fine del programma.
 Le 6 righe successive (dai commenti a GO TO 5): dicono di calcolare un'unica radice ripetuta (X), stampare il risultato, e saltare alla fine del programma.
 Le successive 7 righe (dai commenti a GO TO 5): calcolano le componenti reale ed immaginaria ($XREAL$ ed $XIMAG$) delle radici complesse, stampano i risultati, e ordinano di saltare alla fine del programma.
 Le 4 righe successive (dai commenti a WRITE): calcolano una singola radice (X) e stampano il risultato.
 La riga successiva (5 CONTINUE) è un enunciato fittizio che fornisce un punto di ingresso (nel programma) per i salti precedenti.
 La riga successiva (STOP): conclude l'esecuzione del programma.
 L'ultima riga (END): identifica la fine materiale (ultima riga) del programma.
 (Si noti che questo programma è orientato verso l'operazione in batch.)

- 7.31. Righe 10-20: sono osservazioni (titolo del programma).
 Riga 30: stampa un messaggio che richiede i dati di input.
 Riga 40: introduce i dati di input nel calcolatore.
 Riga 50: effettua dei test per verificare la condizione di arresto dei calcoli o la loro continuazione.
 Riga 60: fa saltare alla riga 430 se $a = 0$.
 Riga 70: valuta il discriminante ($b^2 - 4ac$).
 Righe 80-90: fanno saltare alla riga 330 se il discriminante è negativo e alla riga 230 se il discriminante è nullo.
 Righe 100-160: effettuano il calcolo delle radici reali ($X1$ ed $X2$), stampano i risultati e fanno tornare alla riga 30 (incominciando così un altro calcolo).
 Righe 200-250: calcolano un'unica radice ripetuta (X), stampano il risultato e fanno ritornare alla riga 30.
 Righe 300-360: calcolano le componenti reale ed immaginaria (R ed I) delle radici complesse, stampano i risultati e fanno ritornare alla riga 30.
 Righe 400-450: calcolano un'unica radice (X), stampano il risultato e fanno ritornare alla riga 30.
 Riga 500: conclude l'esecuzione del programma e identifica la fine (l'ultima riga-istruzione) del programma.
 (Si noti che questo programma è scritto per le applicazioni in time-sharing.)

Indice analitico

- Abachi, 67-70, 76-79
- Addizione, 4
- Algol, 191
- APL, 191
- Area del cerchio (programma per computer), 176-177, 191-192
- Argomento di una funzione, 7, 10
- Arrotondamento, 3
 - in eccesso, 3
 - per difetto, 3
- Ascissa, 44
- Asimmetria, 94

- Basic, 190, 195, 199
- Branching (diramazione, estensione), 181

- Calcolatore, elettronico, 13-19
 - programmabile, 19
- Calcoli aritmetici approssimati, 6
- Calcolo degli interessi di pagamenti singoli, 157-159
- Capitale, 157
- Caratteristiche statistiche dei dati, 90-93
- Cifre significative, 2
- Cobol, 188
- Coefficiente di correlazione, 104-105, 115
- Computer, caratteri, 177
 - memoria, 177
 - parole, 177
- Computer, caratteristiche di un, 176-178
 - modi di operare, 178-181
 - velocità e attendibilità, 178
- Confronto logico (computer), 181
- Consistenza, dimensionale, 33-35
 - fra le unità, 34-35
- Convergenza, 126, 142-143
- Conversioni di unità, 32-33
- Coordinate, aritmetiche o cartesiane, 44-47, 70, 74-75
 - di probabilità, 63-65, 72-74, 100-101, 110
 - polari, 58-61, 74-75
 - rettangolari, 44-47
 - triangolari, 61-63
- Coordinate logaritmiche, 55-58, 72
 - a più cicli, 56-58
 - a un solo ciclo, 56
- Coordinate semilogaritmiche, 50-54, 70-71
 - a più cicli, 52-54
 - a un solo ciclo, 52
- Cosecante, 12
- Coseno, 10, 13
- Cotangente, 12

- Dati, caratteri, 176
 - di input, 176
 - di output, 176
 - dispersione, 90
 - misurati, 87
 - numerici, 176
 - raggruppati, 93-94, 96, 109
- Denaro, valore nel tempo del, 162-164
- Deviazione standard, 92-93, 95, 108, 109
 - distribuzione normale, 100, 101, 110
- Deviazioni, rispetto alla media, 88, 105-106
 - (programma per computer), 185-186, 189, 190
- Diagrammi (o grafici), 44-65, 70-75
 - a colonne, 48-50, 72-73
 - aritmetici o cartesiani, 44-47, 70
 - di probabilità, 63-65, 72-74, 101, 110
 - funzionali, 65-67
 - logaritmici, 55-58; 72
 - polari, 58-61, 74-75
 - semilogaritmici, 50-54, 70-71
 - triangolari, 61-63
- Diagrammi di flusso (o diagrammi a blocchi), 177, 181-183, 185, 186, 188, 191-194
- Dimensioni, derivate, 26
 - fondamentali, 25
 - di riferimento, 25
- Dimezzamento dell'intervallo, metodo del, 128-130
- Distribuzione, gaussiana, 63, 98-101, 110
 - normale, 63, 98-101, 110
- Distribuzione cumulativa, 49-50, 63-65, 72-73, 96-98
 - normale, 100-101, 110
- Distribuzioni di frequenza, 94-96
- Divergenza, 126, 142-143
- Divisione, 4

- Elaborazione di un programma per computer, 184-188
 - in batch, 178, 181
- Elevazione a potenza, 5
- Equazione di secondo grado, radici della, 184-185
 - (programma per computer), 198, 199
- Equazioni algebriche,
 - lineari, 122, 141
 - non lineari, 122, 141
 - radici reali, 122-124
 - risoluzione grafica di, 122-124, 141
 - risoluzione numerica di, 124-130
 - tecniche iterative per, 124-130

Equazioni lineari simultanee, risoluzione di, 130-135, 143-146
 Equivalenze di (fra le) unità, 28, 31, 32, 201-202
 Errori, 87-89
 assoluti, 89, 107
 casuali, 88-89
 percentuali, 89, 107
 relativi, 89, 107
 sistematici, 87-88
 Esponente, 1
 Eventi casuali, 94
 Fattore di interesse composto, di pagamenti annuali (annualità) uguali, 160, 167, 204
 di pagamenti singoli, 159, 167, 203
 Fattore di recupero-capitale di pagamenti annuali (annualità) uguali, 160-161, 205
 Fattori di conversione, 32-33, 201-202
 di equivalenza, 32-33, 201-202
 di pesatura o pesi, 90, 94
Flowcharting (vedi Elaborazione di un programma per computer), 184-188
 Fortran, 188-189, 190, 194, 198
 Frequenza relativa, 48-49, 93-94, 94-96
 cumulativa, 49-50, 63-65
 Funzione, di distribuzione cumulativa, 97-98
 esponenziale, 7-8
 logaritmica, 8-10, 13
 Funzione densità di probabilità, 96
 normale, 99-101, 110
 Funzioni, algebriche, 7-10, 13
 trigonometriche, 10-13
 Guadagno di investimento, 166
 Integrazione, grafica, 135-136, 146-147
 numerica, 136-140, 147-148
 Interesse, 157-159
 semplice, 157-158
 Interesse composto, 158-159, 168
 continuo, 167
 Interpolazione di una curva, 102-104, 111-115
 Investimento, guadagno di, 166
 Istogramma, 48-50, 94-96
 Iterazione, 124
 convergenza, 126
 divergenza, 126
 Linguaggi di programmazione, 188-191
Looping (ripetizione), 182-183
 Mantissa, 1
 Media, 90-91, 95, 108, 109
 aritmetica, 90
 distribuzione normale, 100-101, 110
 integrale, 140, 148
 pesata, 107-108
 Media di un elenco di numeri
 (programma per computer), 185-186, 189,

190
 Mediana, 91, 95, 97, 108, 110
 distribuzione normale, 100-101
 Metodo della bisezione, 128-130
 delle sostituzioni successive, 124-127, 142
 di eliminazione di Gauss, 132-134, 143-144
 di eliminazione di Gauss-Jordan, 131-132, 133-134, 144-145
 di Newton-Raphson, 127, 142-143
 Microcomputer, 176
 Minicomputer, 176
 Minimi quadrati, metodo dei, 102, 104, 111-115
 per funzioni di potenze, 104, 112-113
 per funzioni esponenziali, 104, 113-114
 per polinomi, 103-104, 114-115
 per rette, 102-103, 111-112
 Moda, 91-92, 108
 distribuzione normale, 100
 Moltiplicazione, 4
 Movimenti di cassa, 162-166, 168-170
 Nomogrammi, 65-70, 76-79
 Notazione, normalizzata a virgola mobile, 1-2
 polacca inversa (RPN), 16-19
 scientifica, 1, 14
 Operazioni, di input-output
 (computer), 183-184
 di programmazione fondamentali, 181-184
 Ordinata, 44
 Pagamenti annuali (annualità) uguali, 159-162, 168
 Palla che rimbalza (programma per computer), 185-188
 PL/1, 191
 Precisione, numerica, 2, 5
 Probabilità, di eventi casuali, 94
 Profitto, tasso di, 166
 Programma per computer, elaborazione (stesura) di un, 184-188
 Programmazione al computer,
 linguaggi di, 188-191
 operazioni fondamentali, 181-184
 Programmi per computer, di tipo conversazionale, 180
 interattivi, 180
 Quadranti, 46
 Radiante, 10
 Radici, di equazioni algebriche, 122-130, 141
 di equazioni di secondo grado (programma per computer), 198, 199
 Regola, dell'aggiunta al dispari, 3
 di Simpson, 139-140, 147
 Regola del trapezio, grafica, 135-136
 numerica, 136-139, 147, 148
 Risoluzione, di equazioni lineari simultanee, 130-135, 143-146

grafica di equazioni algebriche, 122-124, 141
 numerica di equazioni algebriche, 124-130
 Secante, 12
 Seno, 10, 13
 Sistema degli ingegneri americano, 25, 29-32
 Sistema metrico internazionale (SI), 25, 27-29
 prefissi del, 29
 Sistema operativo algebrico (AOS), 14-16
 Sistemi operativi (calcolatore elettronico), 14-19
 Sottrazione, 4
 Strategie d'investimento, confronto fra, 164-166
 Tangente, 12
 Tasso, d'interesse, 157
 di profitto, 166
 Tecniche iterative per la risoluzione di equazioni algebriche, 124-130
 Terminale, a telescrivente, 179-180
 per time-sharing, 179-180

Time-sharing (spartizione del tempo), 178-181
 Traiettoria di un razzo (programma per computer), 192-195
 Troncamento, 3
 Unità, inglesi, 29-32
 metriche, 27-29
 Unità SI (o del Sistema Internazionale), 27-29
 prefissi delle, 52
 Valore attuale, 162-166, 168-170
 del denaro nel tempo, 162-164
 futuro, 162, 164, 165, 168-169
 Valutazione numerica (computer), 181
 Varianza, 92, 95, 108
 Zeri,
 iniziali, 2
 interni o intermedi, 2
 terminali, 2

Volumi pubblicati:

1. Ayres
CALCOLO DIFFERENZIALE E INTEGRALE
2. Edminister
CIRCUITI ELETTRICI
3. Ayres
EQUAZIONI DIFFERENZIALI
4. Spiegel
STATISTICA
5. Rosenberg
CHIMICA GENERALE
6. Spiegel
MECCANICA RAZIONALE
7. Di Stefano-Stubberud-Williams
REGOLAZIONE AUTOMATICA
8. Spiegel
ANALISI MATEMATICA
9. Ayres
MATRICI
10. Spiegel
MANUALE DI MATEMATICA
11. Lowenberg
CIRCUITI ELETTRONICI
12. Mendelson
ALGEBRA DI BOOLE
E CIRCUITI DI COMMUTAZIONE
13. Spiegel
ANALISI VETTORIALE
14. Scheid
ANALISI NUMERICA
15. Spiegel
VARIABILI COMPLESSE
16. Lipschutz
CALCOLO DELLE PROBABILITA'
17. Abbott-Van Ness
TERMODINAMICA
18. Lipschutz
ALGEBRA LINEARE
19. Hughes-Gaylord
EQUAZIONI PER L'INGEGNERIA
20. McLean-Nelson
MECCANICA APPLICATA
21. Cashin-Lerner
RAGIONERIA 1
22. Seto
SISTEMI VIBRANTI
23. Stansfield
GENETICA
24. Giles
MECCANICA DEI FLUIDI E IDRAULICA
25. Turna
ANALISI DELLE STRUTTURE
26. Spiegel
ANALISI DI FOURIER
27. Spiegel
TRASFORMATE DI LAPLACE
28. Nash
RESISTENZA DEI MATERIALI
29. Mase
MECCANICA DEI CONTINUI
30. Salvatore
MICROECONOMIA

31. Ayres
MATEMATICA GENERALE
32. Diulio
MACROECONOMIA
33. Van der Merwe
FISICA GENERALE
34. Hecht
OTTICA
35. Cashin-Lerner
RAGIONERIA 2
36. Seto
ACUSTICA
37. Hall-Holowenko-Laughlin
COSTRUZIONE DI MACCHINE
38. Hughes-Brighton
FLUIDODINAMICA
39. Lipschutz
TOPOLOGIA
40. Spiegel
PROBABILITA' E STATISTICA
41. Metz
CHIMICA FISICA
42. Lipschutz
TEORIA DEGLI INSIEMI
43. Gottfried
PROGRAMMARE IN BASIC
44. Meislich-Nechamkin-Sharefkin
CHIMICA ORGANICA
45. Lipschutz-Poe
PROGRAMMARE IN FORTRAN
46. Ayres
ALGEBRA MODERNA
47. Spiegel
DIFFERENZE FINITE
ED EQUAZIONI ALLE DIFFERENZE
48. Edminister
ELETTROMAGNETISMO
49. Temes
COMUNICAZIONI ELETTRONICHE
50. Gautreau-Savin
FISICA MODERNA
51. Nasar
MACCHINE ELETTRICHE
52. Pitt-Sissom
TRASMISSIONE DEL CALORE
53. Beiser
SCIENZE DELLA TERRA
54. Lipschutz-Lipschutz
ELABORAZIONE DEI DATI
55. Dowling
MATEMATICA PER ECONOMISTI
56. Gottfried
INTRODUZIONE AI CALCOLI DI
INGEGNERIA

Volumi di prossima pubblicazione:

Bronson
MODERNA INTRODUZIONE ALLE
EQUAZIONI DIFFERENZIALI